

7.2.5 Počítání s vektory

Př. 1: Jsou dány body $A[-1;3]$, $B[2;1]$ a $C[5;-2]$. Rozhodni, zda tyto tři body leží v přímce.

Pokud body leží v přímce tak platí: $(C - A) = k(B - A)$.

$$(C - A) = (5 - (-1); -2 - 3) = (6; -5) \quad (B - A) = (2 - (-1); 1 - 3) = (3; -2)$$

$$6 = 3 \cdot k \Rightarrow k = 2 \quad -5 = k \cdot (-2) \Rightarrow k = \frac{5}{2} \Rightarrow \text{pro každou souřadnici získáváme jiné } k \Rightarrow$$

Vektor $(C - A)$ není násobkem vektoru $(B - A) \Rightarrow$ body A , B a C neleží v přímce.

Př. 2: Jsou dány body $A[-1;3]$, $B[2;1]$. Urči hodnotu parametru x tak, aby bod $D[x;2]$ ležel na přímce AB .

$$(D - A) = (x - (-1); 2 - 3) = (x + 1; -1) \quad (B - A) = (2 - (-1); 1 - 3) = (3; -2)$$
$$x + 1 = 3 \cdot k$$

$$\Rightarrow \text{soustava rovnic: } \begin{aligned} -1 &= k \cdot (-2) \Rightarrow k = \frac{1}{2} & x + 1 &= 3 \cdot k = 3 \cdot \frac{1}{2} & x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Př. 3: Jsou dány body $A[-9;1]$, $B[9;-5]$ a $C[6;7]$.

- Dokaž, že body A , B a C tvoří trojúhelník.
- Urči souřadnice středů stran trojúhelníka ABC .
- Urči délky stran trojúhelníka ABC .
- Urči souřadnice těžiště trojúhelníka ABC .

a) Dokaž, že body A , B a C tvoří trojúhelník.

$$B - A = (18; -6) \quad C - A = (15; 6)$$

Pro rovnoběžné vektory platí, že jeden je násobek druhého:

$$(18; -6) = k(15; 6) \Rightarrow k = \frac{18}{15} = \frac{6}{5} \quad k = \frac{-6}{6} = -1$$

Vektory nejsou rovnoběžné \Rightarrow body A , B a C tvoří trojúhelník.

b) Urči souřadnice středů stran trojúhelníka ABC .

$$S_{AB} = \frac{A+B}{2} = \left[\frac{-9+9}{2}; \frac{1+(-5)}{2} \right] = [0; -2], \quad S_{AC} = \frac{A+C}{2} = \left[\frac{-9+6}{2}; \frac{1+7}{2} \right] = \left[-\frac{3}{2}; 4 \right]$$

$$S_{BC} = \frac{B+C}{2} = \left[\frac{9+6}{2}; \frac{-5+7}{2} \right] = \left[\frac{15}{2}; 1 \right]$$

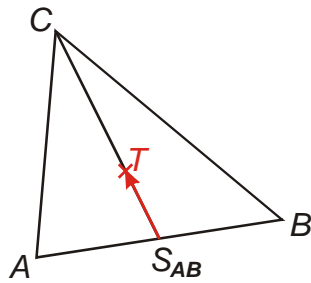
c) Urči délky stran trojúhelníka ABC .

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} = \sqrt{(9 - [-9])^2 + (-5 - 1)^2} = \sqrt{360} = 6\sqrt{10}$$

$$|AC| = \sqrt{(c_1 - a_1)^2 + (c_2 - a_2)^2} = \sqrt{(6 - [-9])^2 + (7 - 1)^2} = \sqrt{261} = 3\sqrt{29}$$

$$|BC| = \sqrt{(c_1 - b_1)^2 + (c_2 - b_2)^2} = \sqrt{(6 - 9)^2 + (7 - [-5])^2} = \sqrt{153} = 3\sqrt{17}$$

d) Urči souřadnice těžiště trojúhelníka ABC .



Těžiště trojúhelníku se nachází v jedné třetině těžnice \Rightarrow pro

$$\text{bod } T \text{ platí: } T = S_{AB} + \frac{1}{3}(C - S_{AB})$$

$$(C - S_{AB}) = (6; 9)$$

$$T = S_{AB} + \frac{1}{3}(C - S_{AB}) = [0; -2] + \frac{1}{3}(6; 9) = [2; 1]$$

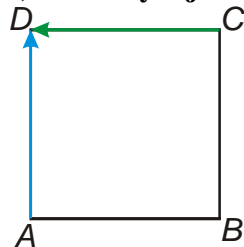
Př. 4: (BONUS) Odvoď obecný vztah pro výpočet těžiště trojúhelníku ze souřadnic jeho vrcholů $A[a_1; a_2]$, $B[b_1; b_2]$, $C[c_1; c_2]$.

$$T = \left[\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}; \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3} \right] \quad T = \frac{1}{3}(A + B + C)$$

Př. 5: Jsou dány body bodu $A[2; -2; 1]$, $B[5; 2; 1]$ a $C[1; 5; 1]$.

- Urči zbývající vrchol čtverce $ABCD$.
- Urči délku strany čtverce $ABCD$
- Urči vrcholy krychle $ABCDEFGH$. Vektor $E - A$ má směr shodný s osou z .
- Urči souřadnice středu krychle a středu stěny $BCFG$.
- Označíme vektory $u = B - A$, $v = D - A$ a $w = E - A$. Vyjádři pomocí těchto vektorů vektory $S_{AB} - C$, $S_{BC} - S_{EF}$

a) Urči zbývající vrchol čtverce $ABCD$.



Z obrázku je zřejmé, že platí:

$$D = C + (A - B) = A + (C - B)$$

$$D = C + (A - B) = [1; 5; 1] + (-3; -4; 0) = [-2; 1; 1]$$

kontrola:

$$D = A + (C - B) = [2; -2; 1] + (-4; 3; 0) = [-2; 1; 1]$$

b) Urči délku strany čtverce $ABCD$

$$a = |AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} = \sqrt{(5 - 2)^2 + (2 - [-2])^2 + (1 - 1)^2} = 5$$

c) Urči vrcholy krychle $ABCDEFGH$. Vektor $E - A$ má směr shodný s osou z .

Vektor $E - A$ musí mít velikost 5 $\Rightarrow E - A = (0; 0; 5)$

$$E = A + (E - A) = [2; -2; 1] + (0; 0; 5) = [2; -2; 6]$$

$$F = B + (E - A) = [5; 2; 1] + (0; 0; 5) = [5; 2; 6]$$

$$G = C + (E - A) = [1; 5; 1] + (0; 0; 5) = [1; 5; 6]$$

$$H = D + (E - A) = [-2; 1; 1] + (0; 0; 5) = [-2; 1; 6]$$

d) Urči souřadnice středu krychle a středu stěny $BCFG$.

$$S = [2; -2; 1] + \frac{1}{2}(3; 4; 0) + \frac{1}{2}(0; 0; 5) + \frac{1}{2}(-4; 3; 0) = [1; 5; 1; 5; 3, 5]$$

$$S = [5; 2; 1] + \frac{1}{2}(-4; 3; 0) + \frac{1}{2}(0; 0; 5) = [3; 3, 5; 3, 5]$$

e) Označíme vektory $u = B - A$, $v = D - A$ a $w = E - A$. Vyjádři pomocí těchto vektorů vektory $S_{AB} - C$, $S_{BC} - S_{EF}$

$$S_{AB} - C = -\frac{1}{2}u - v$$

$$S_{BC} - S_{EF} = \frac{1}{2}u - w + \frac{1}{2}v$$