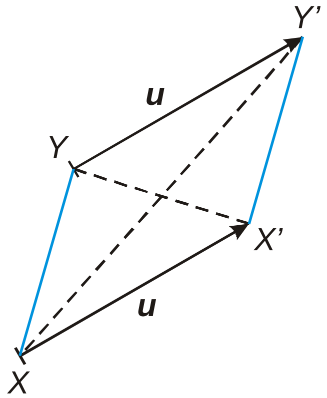
7.2.5 Posunutí o vektor

Předpoklady: 7201

Vrátíme se ještě jednou k zavedení souřadnic vektoru ***u***:
$u_1 = b_1 - a_1$, $u_2 = b_2 - a_2$, $u_3 = b_3 - a_3$ $\Rightarrow$ symbolicky zapisujeme $\boldsymbol{u} = B - A$.
Vztah můžeme i obrátit: $B = A + \boldsymbol{u}$ (do bodu *B* se dostaneme z bodu *A* posunutím o vektor ***u***).

Zobrazení roviny nebo prostoru, které každému bodu *X* přiřadí bod $X + \boldsymbol{u}$ se nazývá posunutí o vektor *u*. Jde o shodné zobrazení.

Př. 1: **(BONUS)** Dokaž pomocí vektorů, že posunutí o vektor ***u*** je shodné zobrazení.



Sestrojíme body $X' = X + \boldsymbol{u}$, $Y' = Y + \boldsymbol{u}$ $\Rightarrow$ úsečky XX' a YY' jsou dvě umístění stejného vektoru $\Rightarrow$ úsečky XX' a YY' jsou shodné a rovnoběžné $\Rightarrow$ čtyřúhelník $XX'Y'Y$ je rovnoběžník $\Rightarrow$ úsečky XY a $X'Y'$ jsou rovnoběžné a shodné

Př. 2: Je dán bod $A[1;2;3]$ a vektor $\boldsymbol{u} = (-2;0;3)$. Urči souřadnice bodu $B = A + \boldsymbol{u}$.

$B = A + \boldsymbol{u} = [1;2;3] + (-2;0;3) = [1+(-2);2+0;3+3] = [-1;2;6]$
Souřadnice bodu *B* jsou $B[-1;2;6]$

Pedagogická poznámka: Souřadnice bodu *B* je možné i zvlášť:
$b_1 = a_1 + u_1 = 1 - 2 = -1$ $\quad$ $b_2 = a_2 + u_2 = 2 + 0 = 2$ $\quad$ $b_3 = a_3 + u_3 = 3 + 3 = 6$
V řešení uvedený postup považuji za vhodnější (u slabších studentů je nutné dlouho upevňovat vědomí, že tři souřadnice bodu (vektoru) k sobě patří a ten správný význam mají pouze dohromady.
Je dobré dávat pozor na studenty, zda dodržují typy závorek. Právě správný typ závorek často podstatně zjednodušuje kontrolu příkladů.

Př. 3: V prostoru je dán bod $B[-2;3;7]$ vektor $\boldsymbol{u} = P - Q$. Urči bod *A* tak, aby platilo $B = A + \boldsymbol{u}$, pokud $P[0;2;5]$ a $Q[-2;3;4]$.

určíme vektor ***u***: $\boldsymbol{u} = P - Q = ([0-(-2)];[2-3];[5-4]) = (2;-1;1)$
Vypočteme *A*:

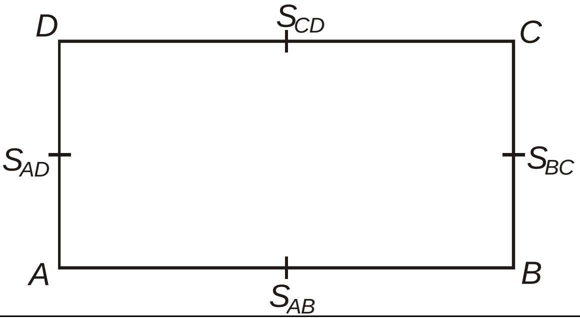
$b_1 = a_1 + u_1 \Rightarrow a_1 = b_1 - u_1 = -2 - 2 = -4$

$b_2 = a_2 + u_2 \Rightarrow a_2 = b_2 - u_2 = 3 - (-1) = 4$

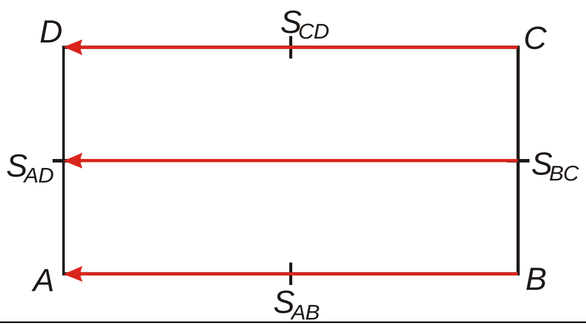
$b_3 = a_3 + u_3 \Rightarrow a_3 = b_3 - u_3 = 7 - 1 = 6$

Bod *A* má souřadnice $A[-4;4;6]$.

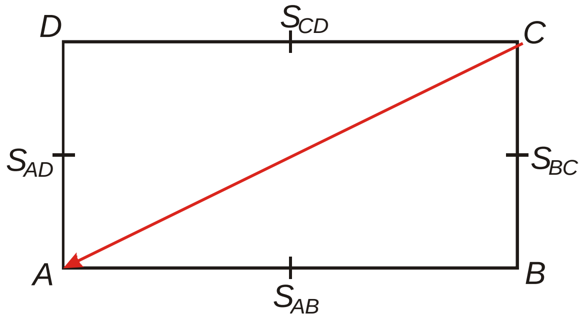
Př. 4: V rovině je dán obdélník *ABCD*. Kromě vrcholů obdélníka jsou na obrázku vyznačeny také středy stran S_{AB}, S_{BC}, S_{CD} a S_{AD}. Urči vektory $A-B$, $A-C$, $A-D$, $A-S_{AB}$, $A-S_{BC}$, $A-S_{CD}$ a $A-S_{AD}$ pomocí jiných bodů vyznačených na obrázku. Všechna zapsaná umístění jednotlivých vektorů do obrázku zakresli.



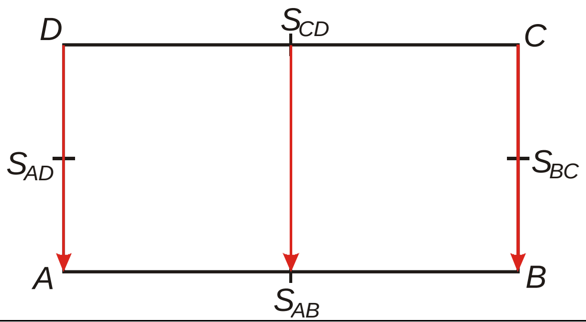
$A - B = D - C = S_{AD} - S_{BC}$



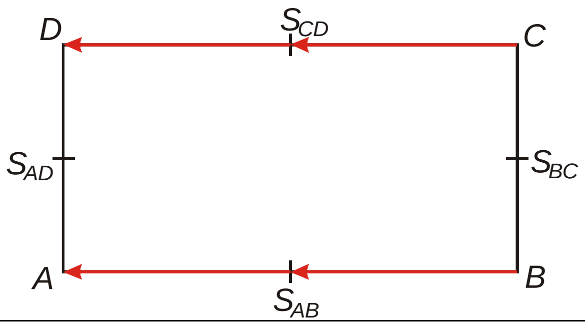
$A - C$



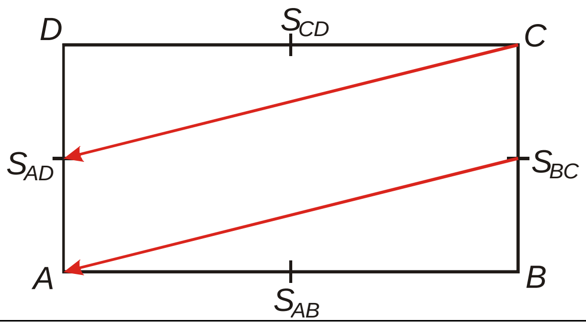
$A - D = B - C = S_{AB} - S_{CD}$



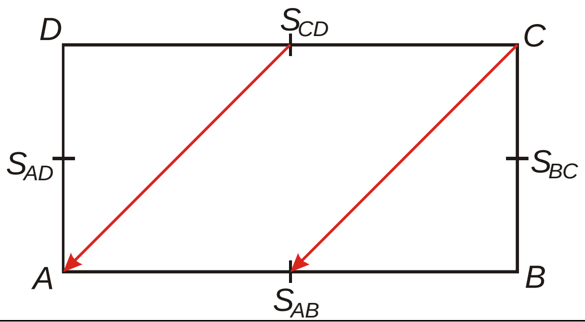
$A - S_{AB} = S_{AB} - B = D - S_{CD} = S_{CD} - C$



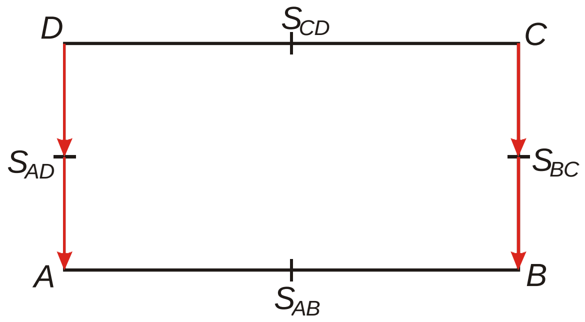
$A - S_{BC} = S_{AD} - C$



$A - S_{CD} = S_{AB} - C$



$A - S_{AD} = S_{AD} - D = B - S_{BC} = S_{BC} - C$

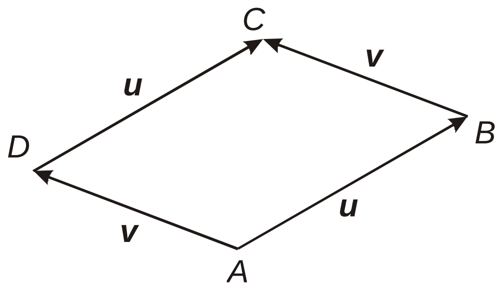


Pedagogická poznámka: Předchozí příklad používám jako synchronizační. Není důležité, aby jej všichni udělali celý. Naopak je důležité, aby všichni udělali následující příklad.

Př. 5: Vypočti dvěma způsoby zbývající vrchol rovnoběžníku *ABCD*, pokud znáš souřadnice bodů $A[-2;3]$, $B[-1;1]$ a $D[1;2]$. Zkontroluj řešení nakreslením obrázku.

Pokud je *ABCD* rovnoběžník, jeho protější strany jsou dvě různá umístění stejného vektoru.

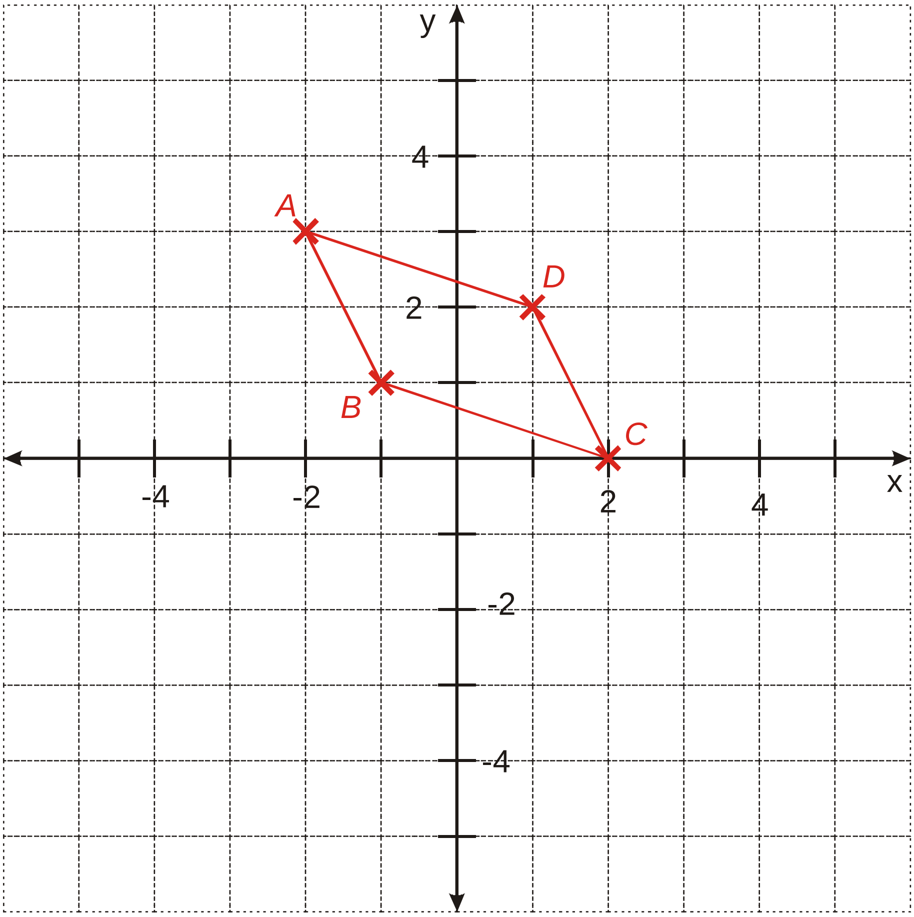
Označíme: $\boldsymbol{u} = B - A = (1;-2)$ $\quad$ $\boldsymbol{v} = D - A = (3;-1)$



Z obrázku je zřejmé, že platí:

$C = B + \boldsymbol{v} = [-1;1] + (3;-1) = (2;0)$

$C = D + \boldsymbol{u} = [1;2] + (1;-2) = (2;0)$



Dodatek: Správné vztahy je možné získat i takto: $D - A = C - B \Rightarrow C = B + (D - A)$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je asi nejdůležitější v hodině. Je nutné, aby ho studenti udělali. Někteří se snaží vyřešit příklad bez vektorů pomocí vzdáleností, další použijí vektory, ale spletou směry. Snažím se, aby si kreslili obrázek, který vůbec nemusí mít správnou polohu bodů, stačí, že jde o rovnoběžník.

Př. 6: Urči všechny vrcholy rovnoběžnostěnu *ABCDEFGH*, pokud platí $A[3;-1;1]$, $B[3;3;2]$, $C[-1;4;1]$ a $H[-3;4;5]$.

Všechny stěny jsou rovnoběžníky, příkladem je třeba kvádr. Postupujeme podobně jako v předešlém příkladě.
Označíme si:

$\boldsymbol{u} = B - A = (0;4;1)$

$\boldsymbol{v} = D - A = C - B = (-4;1;-1)$

$\boldsymbol{w} = E - A = H - D$ - spočítáme později

Dopočteme bod *D*:

$D = A + \boldsymbol{v} = [3;-1;1] + (-4;1;-1) = [-1;0;0]$

určíme vektor $\boldsymbol{w}$: $\boldsymbol{w} = E - A = H - D = (-2;4;5)$

Dopočteme zbývající vrcholy:

$E = A + \boldsymbol{w} = [3;-1;1] + (-2;4;5) = [1;3;6]$

$F = B + \boldsymbol{w} = [3;3;2] + (-2;4;5) = [1;7;7]$

$G = C + \boldsymbol{w} = [-1;4;1] + (-2;4;5) = [-3;8;6]$

Př. 7: Petáková:
strana 99/cvičení 3
strana 99/cvičení 4

Shrnutí: Souřadnice bodu může určit tak, že se z jiného bodu posuneme o odpovídající vektor.