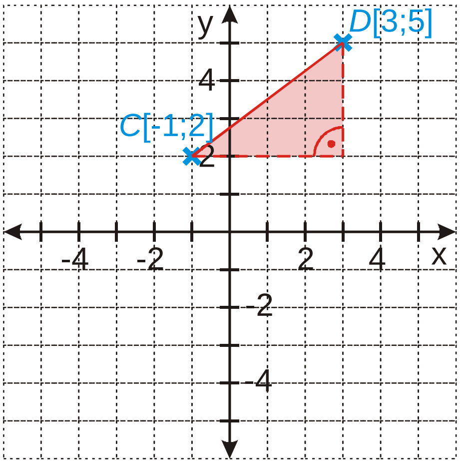
7.1.3 Vzdálenost bodů

Př. 1: Urči vzdálenost bodů $A[1;1]$ a $B[5;4]$.

Př. 2: Najdi situace, ve kterých by se při prvním pohledu mohlo zdát, že vzorec $|AB|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$ pro výpočet vzdáleností neplatí, nebo nebude použitelný. Ověř v takových případech jeho platnost.

a) rozdíl b_1-a_1 nemusí být vždy kladný
b) jak funguje výpočet rozdílu b_1-a_1 v případě, že je jedna ze souřadnic záporná?



Zkusíme obě možnosti výpočtu:

- $(b_1-a_1)=[3-(-1)]^2=4^2=16$
- $(a_1-b_1)=[(-1)-3]^2=(-4)^2=16$

V obou případech jsme získali stejný správný výsledek.

Je to jasné, protože platí $(b_1-a_1)^2=|b_1-a_1|^2$ a $|b_1-a_1|$ je vzdálenost obrazů čísel na číselné ose

Př. 3: Urči vzdálenost bodů
a) $A[1;2]$ a $B[6;14]$ b) $C[5;-1]$ a $D[1;2]$
c) $E[-2;-5]$ a $F[-4;5]$

a) $|AB|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}=\sqrt{(6-1)^2+(14-2)^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13$

b) $|CD|=\sqrt{(d_1-c_1)^2+(d_2-c_2)^2}=\sqrt{(1-5)^2+(2-[-1])^2}=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$

c) $|EF|=\sqrt{(f_1-e_1)^2+(f_2-e_2)^2}=\sqrt{[-4-(-2)]^2+[5-(-5)]^2}=\sqrt{(-2)^2+10^2}=\sqrt{104}=2\sqrt{26}$

Př. 4: Urči zbývající souřadnici bodu B tak, aby platilo: $|AB|=2\sqrt{5}$, $A[-2;3]$, $B[x;1]$.

$|AB|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}=\sqrt{[x-(-2)]^2+(1-3)^2}=\sqrt{[x+2]^2+2^2}=2\sqrt{5}$

$\sqrt{[x+2]^2+2^2}=2\sqrt{5} \qquad /^2$

$(x+2)^2+4=20$

$(x+6)(x-2)=0$

$x_1=-6 \Rightarrow B_1[-6;1]$ $\qquad$ $x_2=2 \Rightarrow B_2[2;1]$

Př. 5: Na ose x najdi bod A tak, aby byl od bodu $B[-3;2]$ vzdálený $2\sqrt{10}$.

Bod A je na ose x $\Rightarrow$ y-ová souřadnice bodu je nula $\Rightarrow$ $A[x;0]$

Teď má cenu dosazovat: $|AB| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2} = \sqrt{(-3-x)^2+(2-0)^2} = 2\sqrt{10}$

$\sqrt{(3+x)^2+4} = 2\sqrt{10}$ $\quad /^2$ $\qquad (x+9)(x-3)=0$

$x_1 = -9 \Rightarrow A_1[-9;0]$ $\qquad x_2 = 3 \Rightarrow A_2[3;0]$

Př. 6: Rozhodni, který z následujících vzorců, správně určuje vzdálenost bodu A, B v prostoru:

a) $|AB| = \sqrt[3]{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

b) $|AB| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

Př. 7: Urči vzdálenost bodů a) $A[1;1;-2]$ a $B[2;3;-1]$ b) $C[3;1;-1]$ a $D[0;1;-2]$.

a) $|AB| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2} = \sqrt{(2-1)^2+(3-1)^2+[-1-(-2)]^2} =$
$= \sqrt{1^2+2^2+1^2} = \sqrt{6}$

b) $|CD| = \sqrt{(d_1-c_1)^2+(d_2-c_2)^2+(d_3-c_3)^2} = \sqrt{(0-3)^2+(1-1)^2+[(-2)-(-1)]^2} =$
$= \sqrt{3^2+0^2+(-1)^2} = \sqrt{10}$

Př. 8: Na ose z najdi bod, který má od bodu $C[2;-2;1]$ vzdálenost 3.

souřadnici $Z[0;0;z]$.

$|CZ| = \sqrt{(z_1-c_1)^2+(z_2-c_2)^2+(z_3-c_3)^2} = \sqrt{(0-2)^2+[0-(-2)]^2+(z-1)^2} = 3$

$\sqrt{2^2+2^2+(z-1)^2} = 3 \quad /^2$

$z(z-2)=0$

$z_1 = 2 \Rightarrow Z_1[0;0;2]$ $\qquad z_2 = 0 \Rightarrow Z_2[0;0;0]$

Př. 9: Na ose x najdi bod, který má od bodu $A[5;-4;-2]$ dvakrát větší vzdálenost než od bodu $B[-1;2;1]$.

Bod na ose x $\Rightarrow$ souřadnice $X[x;0;0]$.

$\sqrt{(x-5)^2+[0-(-4)]^2+[0-(-2)]^2} = 2\sqrt{[x-(-1)]^2+(0-2)^2+(0-1)^2}$

$x^2-10x+25+16+4 = 4(x^2+2x+1+4+1)$

$x^2-10x+45 = 4x^2+8x+24$

$x^2+6x-7=0$ $\qquad (x+7)(x-1)=0$

$x_1 = -7 \Rightarrow X_1[-7;0;0]$ $\qquad x_2 = 1 \Rightarrow X_2[1;0;0]$