6.3.1 Kvadratická rovnice s reálnými koeficienty

Předpoklady:

Pedagogická poznámka: U následujícího přehledu i odvození rozhodně netrvám na tom, aby ho studenti přepsali celý. Naopak zapisují pouze některé řádky. Jde hlavně o to, aby zbylo alespoň 25 minut na počítání rovnic.

Kvadratická rovnice = rovnice, kterou mohu zapsat ve tvaru:
$ax^2+bx+c=0$, $a,b,c\in R$, $a\neq 0$

Řešení pomocí vzorce: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, kde $D=b^2-4ac$ diskriminant rozhoduje o řešitelnosti:

- $D>0 \Rightarrow$ dva reálné kořeny
- $D=0 \Rightarrow$ jeden dvojitý reálný kořen
- $D<0 \Rightarrow$ nemá řešení v oboru reálných čísel

Příklad: $x^2+1=0 \Rightarrow D=-4$ v reálném oboru nemá řešení $\Rightarrow$ zavedení komplexních čísel $\Rightarrow x^2+1=0$ dva kořeny $x_{1,2}=\pm i$
$\Rightarrow$ zdá se, že v komplexním oboru půjde řešit i kvadratické rovnice se záporným diskriminantem

Zopakujeme odvození a uvidíme:

$ax^2+bx+c=0 \quad /\cdot a$ (můžeme, víme že $a\neq 0$)

$a^2x^2+bxa+ca=0$ doplníme na čtverec

$$(ax)^2+2\cdot ax\cdot\frac{b}{2}+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+ac=0$$

$$\left(ax+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+ca=0 \quad /\cdot 4$$

$$4\left(ax+\frac{b}{2}\right)^2-b^2+4ac=0$$

$(2ax+b)^2-\left(b^2-4ac\right)=0$ druhá závorka: $D=b^2-4ac$ je diskriminant

Chtěli bychom upravit rovnici na tvar $A^2-B^2=0$ a pak rozložit na součin, tedy

$\left(2ax+b\right)^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2=0$ - to ale nejde vždy, $\sqrt{-}$ nemá smysl $\Rightarrow$ musíme rozdělit postup podle znaménka diskriminantu

1) kladný nebo nulový diskriminant

$D\geq 0 \quad D=b^2-4ac\geq 0 \Rightarrow \sqrt{D}$ má smysl a můžeme postupovat, jak jsme zamýšleli

$$(2ax+b)^2-\left(\sqrt{D}\right)^2=0$$

$$\left(y-\sqrt{D}\right)\cdot\left(y+\sqrt{D}\right)=0$$

$$y=\pm\sqrt{D}$$

$2ax+b=\pm\sqrt{D}$

$2ax=-b\pm\sqrt{D}$

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ $\qquad$ $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ - starý dobrý vzorec

2) záporný diskriminant

$D<0 \quad D=b^2-4ac<0 \;\Rightarrow\; \sqrt{D}$ nemá smysl

ale $D<0 \;\Rightarrow\; -D>0 \;\Rightarrow$ výraz $-\left(b^2-4ac\right)=4ac-b^2=-D>0$ a půjde odmocnit

$\left(2ax+b\right)^2-\left(b^2-4ac\right)=0$

$\left(2ax+b\right)^2+\left(4ac-b^2\right)=0$ $\qquad$ zkrátíme zápis $4ac-b^2=-D$

$\left(2ax+b\right)^2+\left(\sqrt{-D}\right)^2=0$ $\qquad$ (pod odmocninou je kladné číslo $\Rightarrow$ můžeme odmocnit)

už z kapitoly o dělení víme, že v komplexních číslech platí: $A^2+B^2=\left(A+iB\right)\left(A-iB\right)$

$\left(y+i\sqrt{-D}\right)\cdot\left(y-i\sqrt{-D}\right)=0$

$y=\pm i\sqrt{-D}$

$2ax+b=\pm i\sqrt{-D}$

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$

podobný vzorec jako pro kladný diskriminant $\Rightarrow$ řešíme pořád stejně.
Když je diskriminant záporný, dáme před odmocninu i a číslo pod odmocninou vynásobíme $-1\Rightarrow$ pod odmocninou bude kladné číslo a to budeme moci odmocnit

Vyřešíme rovnici $x^2+6x+10=0$

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot1\cdot10}}{2\cdot1}=\dfrac{-6\pm\sqrt{-4}}{2}$

záporný diskriminant $\Rightarrow$ musíme nasadit nový vzorec

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}=\dfrac{6\pm i\sqrt{4}}{2}=\dfrac{6\pm 2i}{2}=3\pm i$

$K=\left\{3\pm i\right\}$

Závěrečný přehled:

Kvadratická rovnice $ax^2+bx+c=0$ s reálnými koeficienty	v oboru reálných čísel	v oboru komplexních čísel
$D>0$	dva různé reálné kořeny: $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	dva různé reálné kořeny: $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$D=0$	jeden dvojnásobný reálný kořen: $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	jeden dvojnásobný reálný kořen: $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$
$D<0$	nemá kořeny	dva imaginární komplexně sdružené kořeny:

		$x_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$

Př. 1: Vyřeš kvadratické rovnice:

a) $2x^2+3=0$ b) $x^2+4x+5=0$

a) $2x^2+3=0$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-0\pm\sqrt{0^2-4\cdot2\cdot3}}{2\cdot2}=\frac{\pm\sqrt{-36}}{4}$$

záporný diskriminant $\Rightarrow$ musíme nasadit nový vzorec

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}=\frac{\pm i\sqrt{24}}{4}=\frac{\pm i2\sqrt{6}}{4}=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}i$$

$$K=\left\{\pm\frac{\sqrt{6}}{2}i\right\}$$

b) $x^2+4x+5=0$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}=\frac{-4\pm\sqrt{-4}}{2}$$

záporný diskriminant $\Rightarrow$ musíme nasadit nový vzorec

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}=\frac{-4\pm i\sqrt{4}}{2}=\frac{-4\pm2i}{2}=-2\pm i$$

$$K=\{-2\pm i\}$$

Př. 2: Vyřeš kvadratické rovnice:

a) $9x^2-24x+16=0$ b) $5x^2-6x+2=0$

c) $6x^2-19x+15=0$ d) $2x^2+4x+6=0$

a) $9x^2-24x+16=0$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-24)\pm\sqrt{24^2-4\cdot9\cdot16}}{2\cdot9}=\frac{24\pm\sqrt{0}}{18}=\frac{4}{3}$$

jeden reálný dvojnásobný kořen

$$K=\left\{\frac{4}{3}\right\}$$

b) $5x^2-6x+2=0$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot5\cdot2}}{2\cdot5}=\frac{6\pm\sqrt{-4}}{10}$$

záporný diskriminant $\Rightarrow$ musíme nasadit nový vzorec

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}=\frac{6\pm i\sqrt{4}}{10}=\frac{6\pm2i}{10}=\frac{3}{5}\pm\frac{1}{5}i$$

$$K=\left\{\frac{3}{5}\pm\frac{1}{5}i\right\}$$

c) $6x^2 - 19x + 15 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-19) \pm \sqrt{(-19)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 15}}{2 \cdot 6} = \frac{19 \pm 1}{12}$$

dva reálné kořeny:

$$x_1 = \frac{19+1}{12} = \frac{5}{3} \qquad x_2 = \frac{19-1}{12} = \frac{3}{2}$$

$$K = \left\{\frac{3}{2}; \frac{5}{3}\right\}$$

d) $2x^2 + 4x + 6 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6}}{2 \cdot 2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-32}}{4}$$

záporný diskriminant $\Rightarrow$ musíme nasadit nový vzorec

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{-4 \pm i\sqrt{32}}{4} = \frac{-4 \pm i4\sqrt{2}}{4} = -1 \pm i\sqrt{2}$$

$$K = \left\{-1 \pm i\sqrt{2}\right\}$$

Př. 3: Petáková:
strana 139/cvičení 60 a) b) c)

Teď umíme najít dva kořeny pro každou kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow$ každý kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$ s reálnými koeficienty je možné rozložit na součin $a(x - x_1)(x - x_2)$, kde x_1, x_2 jsou kořeny kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$.

Př. 4: Rozlož na součin lineárních činitelů trojčlen $4x^2 - 16x + 25$.

Hledáme kořeny rovnice $4x^2 - 16x + 25 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25}}{2 \cdot 4} = \frac{16 \pm \sqrt{-144}}{8}$$

záporný diskriminant $\Rightarrow$ musíme nasadit nový vzorec

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{16 \pm i\sqrt{144}}{8} = \frac{16 \pm 12i}{8} = 2 \pm i\frac{3}{2}$$

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 4\left[x - \left(2 - \frac{3}{2}i\right)\right]\left[x - \left(2 + \frac{3}{2}i\right)\right] = (2x - 4 - 3i)(2x - 4 + 3i)$$

Př. 5: Petáková:
strana 140/cvičení 67 d) e) f)

Shrnutí: