6.1.2 Operace s komplexními čísly

Předpoklady: 6101

Komplexním číslem nazýváme výraz ve tvaru $a+bi$, kde *a*, *b* jsou reálná čísla a *i* je číslo, pro něž platí $i^2=-1$.

V komplexním čísle $a+bi$ se nazývá:
- **číslo *a* reálná část**
- **číslo *b* imaginární část**
- **číslo *i* imaginární jednotka.**

Množinu komplexních čísel značíme *C* ($\mathbb{C}$), komplexní číslo většinou z.

Zápis komplexního čísla z ve tvaru $a+bi$ nazýváme **algebraický tvar komplexního čísla.**

Př. 1: Jaký je vztah mezi množinami komplexních a reálných čísel?

Zdá se, že platí: $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$, že reálná čísla jsou komplexní čísla s nulovou imaginární částí $a+0i=a$.
Není to ale jisté, dokud nebudeme mít zavedené operace a nezkontrolujeme, zda fungují stejně jako u reálných čísel. Náš odhad je však správný.

Máme číslo $z=a+bi$. Pokud platí, že:
- $b\neq 0$, říkáme číslu z **číslo imaginární,**
- $b\neq 0$ a $a=0$, říkáme číslu z **číslo ryze imaginární**,
- $b=0$, říkáme číslu z **číslo reálné**.

Př. 2: Z následujících čísel, vyber čísla komplexní a rozděl je do skupin: $3i$, $1+i\sqrt{2}$, $3-2i$, $\pi+\sqrt{2}$, $2+i-j+k$, $-1+2i$, $3-\sqrt{2}$, $i-\sqrt{3}$, 0, $\frac{1}{3}i$.

Komplexní čísla: $3i$, $1+i\sqrt{2}$, $3-2i$, $\pi+\sqrt{2}$, $-1+2i$, $3-\sqrt{2}$, $i-\sqrt{3}$, 0, $\frac{1}{3}i$.

Reálná čísla: $\pi+\sqrt{2}$, $3-\sqrt{2}$, 0.

Imaginární čísla: $3i$, $1+i\sqrt{2}$, $3-2i$, $-1+2i$, $i-\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}i$.

Ryze imaginární čísla: $3i$, $\frac{1}{3}i$.

Komplexní čísla jsme sice zavedli, ale samotná čísla bez operací nám k ničemu nejsou $\Rightarrow$ musíme se s nimi naučit počítat.
Fakticky už jsme ale začali s komplexními čísly počítat, když jsme je dosazovali do rovnic a pracovali jsme s nimi jako s dvojčleny $\Rightarrow$ zkusíme pokračovat v této cestě.

Pedagogická poznámka: Většina studentů příliš nerozumí, co si mají představit, když říkáme, že operace zavedeme. Početní operace, které znají u reálných čísel, nechápou jako zavedené, ale dané realitou okolo nich. Snažím se jim opakovat, že stejně jako jsme si číslo *i* vymysleli, můžeme si vymyslet i způsob, jakým ho budeme používat. Jediným omezením je pouze to, aby operace byly bezesporné. Zároveň ale budeme chtít, aby měly vlastnosti, které ulehčují počítání (komutativnost, asociativnost, distributivnost).

Pedagogická poznámka: Následujících několik příkladů nepromítám, jenom je zadávám od tabule. Počítač použijeme až na příklad 7.

Př. 3: Rozhodni, jaké podmínky musí být splněny, aby se dvě komplexní čísla $a+bi$ a $c+di$ rovnala.

Komplexní čísla mají dvě části, pokud se mají rovnat, musí být obě části stejné $\Rightarrow$
dvě komplexní čísla $a+bi$ a $c+di$ se rovnají právě tehdy, když platí $a=c$, $b=d$.

Př. 4: Sečti komplexní čísla $z_1=2+3i$ a $z_2=1+2i$ a na základě výpočtu definuj součet dvou komplexních čísel $a+bi$ a $c+di$.

S komplexními čísly zacházíme jako s dvojčleny $\Rightarrow$
$z_1+z_2=(2+3i)+(1+2i)=2+3i+1+2i=2+1+3i+2i=3+5i$

Pro libovolná komplexní čísla $a+bi$ a $c+di$ platí:
$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

Jak s odčítáním? Odčítání = přičítání opačného čísla $\Rightarrow$
Opačné číslo k číslu $z=a+bi$ je číslo $-z=-a-bi$.
$\Rightarrow$
Rozdíl z_1-z_2 komplexních čísel z_1,z_2 je součet čísla z_1 a čísla opačného k číslu z_2 $\Rightarrow$
$z_1-z_2=z_1+(-z_2)$. (pořád stejné jako u dvojčlenů)

Př. 5: Jsou dána komplexní čísla $z_1=2-3i$ a $z_2=-2-3i$. Urči:
a) z_1+z_2 b) z_1-z_2 c) z_2-z_1 d) $-z_1-z_2$

a) $z_1+z_2=(2-3i)+(-2-3i)=2-3i-2-3i=-6i$

b) $z_1-z_2=(2-3i)-(-2-3i)=2-3i+2+3i=4$

c) $z_2-z_1=(-2-3i)-(2-3i)=-2-3i-2+3i=-4$

d) $-z_1-z_2=-(2-3i)-(-2-3i)=-2+3i+2+3i=6i$

Pedagogická poznámka: Je dobré se zeptat studentů, jestli neexistuje nějaký důvod pro podobnost výsledků. Schopnost všimnout si, že jde o dvojice opačných výrazů, umožňuje při výpočtech postupovat rychleji a hlavně pravidelně kontrolovat jeho správnost.

Př. 6: Vynásob komplexní čísla $z_1 = 2+3i$ a $z_2 = 1+2i$ a na základě výpočtu definuj součin dvou komplexních čísel $a+bi$ a $c+di$.

S komplexními čísly zacházíme jako s dvojčleny $\Rightarrow$
$z_1 \cdot z_2 = (2+3i)(1+2i) = 2\cdot 1 + 2\cdot 2i + 3i\cdot 1 + 3i\cdot 2i = 2+4i+3i+6i^2 = 2+7i-6 = -4+7i$

Pro libovolná komplexní čísla $a+bi$ a $c+di$ platí:

$$(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac - bd + (ad+bc)i$$

Poznámka: Lepší než si pamatovat vztah pro násobení je pamatovat si, že násobíme stejně jako dvojčleny a vždy, když dostaneme i^2, použijeme vztah $i^2 = -1$.

Pedagogická poznámka: Předchozí poznámka je důležitá. Pokud ji neřeknete určitě se objeví takoví, kteří se budou snažit zapamatovat si vzorec a pak ho (samozřejmě většinou špatně) uplatňovat při výpočtech.

S dělením ještě chvíli počkáme.

Př. 7: Zapiš v algebraickém tvaru:
a) $2+3i+4-2i$ b) $(2+3i)(4-i)$ c) $(1-2i)(-3+2i)$
d) $(2-3i)(2+3i)$ e) $(\sqrt{2}+i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i\sqrt{2})$

Algebraický tvar: $a+bi$ $\Rightarrow$ musíme upravit výrazy do jednodušího tvaru.
a) $2+3i+4-2i = 6+i$
b) $(2+3i)(4-i) = 8-2i+12i-3i^2 = 8+10i-3(-1) = 11+10i$
c) $(1-2i)(-3+2i) = -3+2i+6i-4i^2 = -3+4+8i = 1+8i$
d) $(2-3i)(2+3i) = 4-9i^2 = 4+9+0i = 13$
e) $(\sqrt{2}+i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i\sqrt{2}) = \sqrt{2}\sqrt{3} + i\sqrt{2}\sqrt{2} + i\sqrt{3}\sqrt{3} + i^2\sqrt{3}\sqrt{2} = \sqrt{6}+2i+3i-\sqrt{6} = 5i$

Pedagogická poznámka: Někteří studenti nepochopí, co znamená zadání předchozího příkladu. Je dobré jim bez otálení vysvětlit, že musí příklady vypočítat, aby získali tvar $a+bi$.

Př. 8: Urči součin komplexního čísla $a+bi$ a nuly.

$(a+bi)0 = 0\cdot a + 0\cdot bi = 0$ $\Rightarrow$ součin nuly a libovolného komplexního čísla je roven nule.

Výpočty s reálnými čísly usnadňuje, když mají další vlastnosti ulehčující výpočty.
Sčítání a násobení reálných čísel je:
- komutativní (nezáleží na pořadí)
- asociativní (nezáleží na uzávorkování)
- distributivní (můžeme roznásobovat závorky)

Pokud chceme počítat s komplexními čísly, stejně jako s reálnými dosud, musíme se přesvědčit, že mají tyhle vlastnosti také.

Př. 9: Dokaž, že součin komplexních čísel $a+bi$ a $c+di$ je komutativní.

Součin je komutativní, když nezáleží na pořadí.
$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$
$(c+di)(a+bi)=ca+cbi+dai++dbi^2=(ca-db)+(cb+da)i=(ac-bd)+(ad+bc)i$
Díky vlastnostem reálných čísel můžeme oba výrazy upravit do stejného tvaru $\Rightarrow$ násobení komplexních čísel je komutativní.

Podobně můžeme dokázat i ostatní vlastnosti $\Rightarrow$
Sčítání a násobení komplexních čísel je:
- **komutativní (nezáleží na pořadí)**
- **asociativní (nezáleží na uzávorkování)**
- **distributivní (můžeme roznásobovat závorky)**

$\Rightarrow$ s komplexními čísly můžeme počítat stejně jako s reálnými.

Dodatek: Předchozí vlastnosti jsou velmi důležité. Komplexní čísla i přes to, že jsou pouze vymyšlená, mají velké využití v praxi (například jedno z pojetí kvantové mechaniky vyžaduje přímo funkce komplexních čísel) a důvodem je částečně právě to, že umožňují snadné počítání.
Existují ještě obecnější množiny čísel, například čísla hyperkomplexní $Z=a+bi+cj+dk$, jejichž využití je podstatně méně časté právě kvůli tomu, že se u nich nepodařilo zavést základní operace tak, aby uvedené vlastnosti měly.

Je-li součin dvou komplexních čísel roven nule, je rovno nule alespoň jedno z nich.

Př. 10: **(BONUS)** Věta „Je-li součin dvou komplexních čísel roven nule, je rovno nule alespoň jedno z nich“ zní samozřejmě, ale vzhledem k tomu, že násobení komplexních čísel je složitější než násobení reálných čísel, je potřeba ji dokázat. Pokus se o to.

Komplexní čísla si označíme $z_1=a_1+ib_1$ a $z_2=a_2+ib_2$, abychom snadněji rozlišili, která reálná čísla patří ke kterému komplexnímu.
Použijeme vzorec pro násobení:
$z_1\cdot z_2=(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)=a_1a_2+a_1b_2i+b_1a_2i+b_1b_2i^2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)i=0+0i$
$\Rightarrow$ Platí: $a_1a_2-b_1b_2=0$ a zároveň $a_1b_2+b_1a_2=0$ (získali jsme soustavu rovnic).

$a_1a_2-b_1b_2=0 \quad / a_2$ $\qquad$ $a_1b_2+b_1a_2=0 \quad /\cdot b_2$

$a_1a_2^2-a_2b_1b_2=0$ $\qquad$ $a_1b_2^2+b_1a_2b_2=0$

Rovnice sečteme:
$$a_1a_2^2-a_2b_1b_2=0$$
$$\underline{a_1b_2^2+a_2b_1b_2=0}$$
$$a_1a_2^2+a_1b_2^2=0$$

$a_1\left(a_2^2+b_2^2\right)=0 \Rightarrow$ rovnice v součinovém tvaru, alespoň jedno z čísel v součinu musí být nula.

Dvě možnosti:

a) Platí $a_2^2+b_2^2=0$

$\Rightarrow$ součet druhých mocnin reálných čísel se rovná nule, jen když jsou obě rovny nule.

$\Rightarrow a_2=b_2=0 \Rightarrow$ komplexní číslo $z_2=0$.

b) platí $a_1=0$

Dosadíme $a_r=0$ do rovnic ze začátku:

$a_1a_2-b_1b_2=00-b_1b_2=0 \Rightarrow b_1b_2=0$

$a_1b_2+b_1a_2=0+b_1a_2=0 \Rightarrow b_1a_2=0$

Najednou tedy platí: $b_1b_2=b_1a_2=0$. Pokud, není druhé číslo $z_2=a_2+ib_2$ rovno nule, musí platit $b_1=0$.

Platí tedy: $a_1=b_1=0 \Rightarrow$ komplexní číslo $z_1=0$.

Př. 11: Spočti:

a) $3(-1+i)(1-i)-i(2-3i)$ b) $i(2-i)(3+i)(-1-i)-(2+i)(3-i)(3+2i)$

c) $i\left(\sqrt{3}+i\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)+\sqrt{6}+i\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-i\sqrt{2}\right)$

a)

$3(-1+i)(1-i)-i(2-3i)=3\left(-1+i+i-i^2\right)-2i+3i^2=3\left[-1+2i-(-1)\right]-2i+3(-1)=$

$3(2i)-2i-3=-3+4i$

b)

$i(2-i)(3+i)(-1-i)-(2+i)(3-i)(3+2i)=$

$=\left(2i-i^2\right)\left(-3-3i-i-i^2\right)-\left(6-2i+3i-i^2\right)(3+2i)=(2i+1)(-2-4i)-(7+i)(3+2i)=$

$=\left(-4i-8i^2-2-4i\right)-\left(21+14i+3i+2i^2\right)=(6-8i)-(19+17i)=6-8i-19-17i=$

$=-13-25i$

c)

$i\left(\sqrt{3}+i\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)+\sqrt{6}+i\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-i\sqrt{2}\right)=$

$i\left(\sqrt{6}+i\sqrt{6}+2i+2i^2\right)+\sqrt{6}+i\sqrt{2}+2i^2+\sqrt{6}-2i^2=i\left(\sqrt{6}+i\sqrt{6}+2i-2\right)+2\sqrt{6}+i\sqrt{2}=$

$=i\sqrt{6}+i^2\sqrt{6}+2i^2-2i+2\sqrt{6}+i\sqrt{2}=i\sqrt{6}-\sqrt{6}-2-2i+2\sqrt{6}+i\sqrt{2}=$

$=\sqrt{6}-2+i\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}-2\right)$

Př. 12: Petáková:
strana 134/cvičení 1 c) d)

Shrnutí: Komplexní čísla sčítáme a násobíme jako dvojčleny.