5.2.10 Vzdálenost rovin

Předpoklady: 5209

Kdy má cenu uvažovat o vzdálenosti dvou rovin?
Pouze, když jsou rovnoběžné, jinak se protínají.

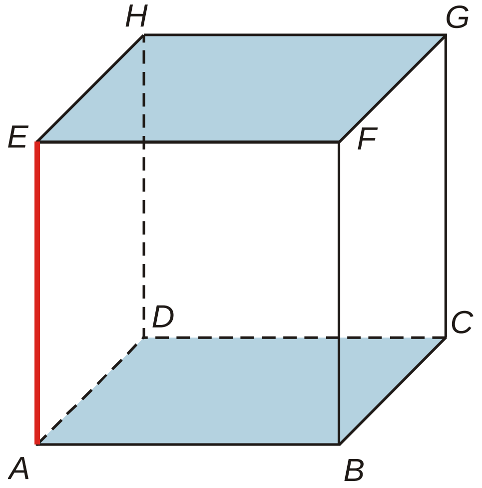
Př. 1: Navrhni definici vzdálenosti dvou rovnoběžných rovin.

Za vzdálenost dvou rovnoběžných rovin považujeme vzdálenost libovolného bodu jedné roviny od druhé roviny.

Př. 2: Je dána standardní krychle *ABCDEFGH*, $|AB| = a = 4\,\text{cm}$. Urči vzdálenost rovin:

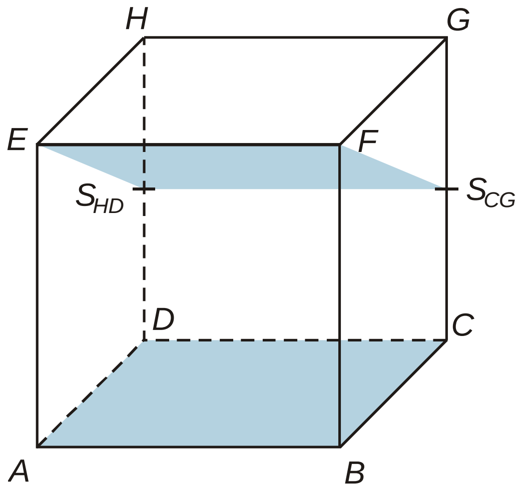
a) ABC a EFG b) ABC a EFS_{CG} c) ADS_{BF} a $S_{AE}FG$
d) AFH a BDG

a) vzdálenost rovin ABC a EFG



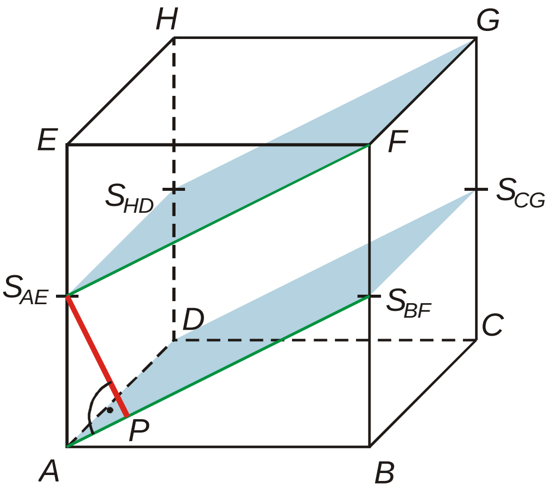
roviny *ABC* a *EFG* jsou navzájem rovnoběžné, obě jsou vodorovné $\Rightarrow$ svislý směr je kolmý na obě.
Zvolíme například bod *E* $\Rightarrow$ jeho kolmým průmětem do roviny *ABC* je bod *A*, pro délku úsečky *AE* platí: $|AE| = a = 4\,\text{cm}$.

b) vzdálenost rovin ABC a EFS_{CG}



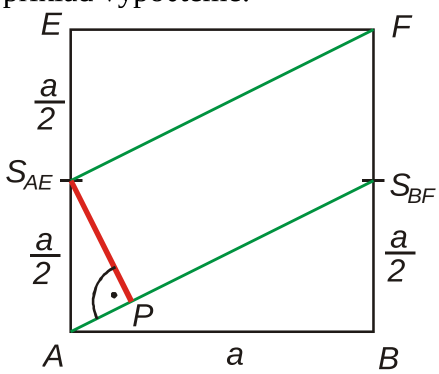
roviny ABC a EFS_{CG} nejsou rovnoběžné a nemá smysl uvažovat o jejich vzdálenosti

c) vzdálenost rovin ADS_{BF} a $S_{AE}FG$



Obě roviny jsou rovnoběžné a kolmé na přední stěnu. Vzdálenost můžeme vypočítat například pomocí bodu S_{AE}.

Jeho kolmý průmět leží také v přední stěně, nakreslíme si přední stěnu (čtverec $ABEF$) a z něj příklad vypočteme:



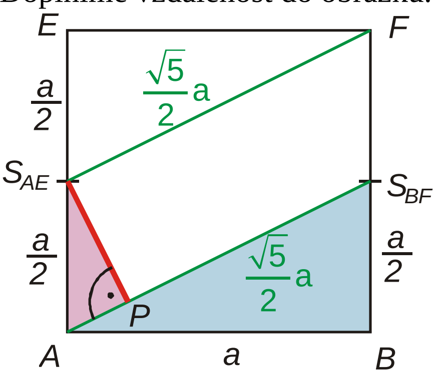
Potřebujeme zjistit délku úsečky AS_{BF}, například z trojúhelníku ABS_{BF}.

$$|AS_{BF}|^2 = |AB|^2 + |BS_{BF}|^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$|AS_{BF}|^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5}{4}a^2$$

$$|AS_{BF}| = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

Doplníme vzdálenost do obrázku.



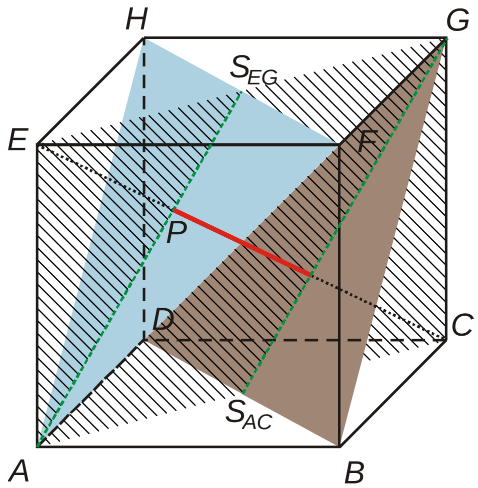
Můžeme využít podobnosti trojúhelníků APS_{AE} a $S_{BF}BA$.

$$\frac{|S_{AE}P|}{|S_{AE}A|} = \frac{|AB|}{|AS_{BF}|} \Rightarrow |S_{AE}P| = |S_{AE}A|\frac{|AB|}{|AS_{BF}|}$$

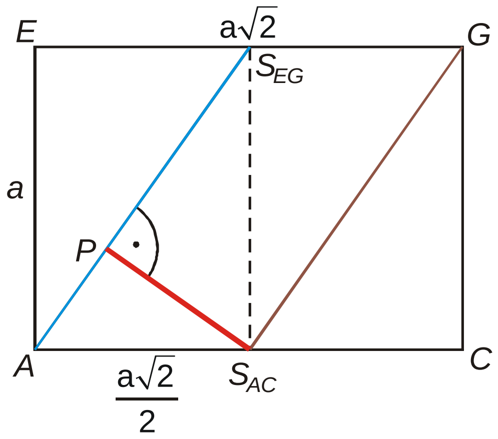
$$|S_{AE}P| = |S_{AE}A|\frac{|AB|}{|AS_{BF}|} = \frac{a}{2}\frac{a}{\frac{\sqrt{5}}{2}a} = \frac{a}{2}\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{a}{\sqrt{5}} = a\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Dosadíme: $|S_{AE}P| = a\frac{\sqrt{5}}{5} = 4\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}\,\text{cm} = 1{,}79\,\text{cm}$

d) vzdálenost rovin AFH a BDG



Příklad nejsnáze vyřešíme v rovině ACE, která je kolmá k oběma rovinám a tak bude vždy obsahovat bod z jedné roviny i jeho kolmý průmět do roviny druhé.

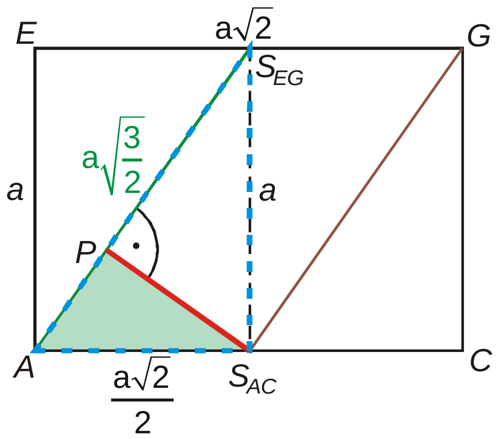


Potřebujeme určit délku úsečky AS_{EG} (například z pravoúhlého trojúhelníku AES_{EG}):

$$|AS_{EG}|^2 = |EA|^2 + |ES_{EG}|^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$|AS_{EG}|^2 = a^2 + \frac{2}{4}a^2 = \frac{3}{2}a^2$$

$$|AS_{EG}| = a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$



Využijeme podobnost trojúhelníků $AS_{EG}S_{AC}$ a $AS_{AC}P$.

$$\frac{|S_{AC}S_{EG}|}{|AS_{EG}|} = \frac{|PS_{AC}|}{|AS_{AC}|} \Rightarrow |PS_{AC}| = |AS_{AC}|\frac{|S_{AC}S_{EG}|}{|AS_{EG}|}$$

$$|PS_{AC}| = |AS_{AC}|\frac{|S_{AC}S_{EG}|}{|AS_{EG}|} = \frac{a\sqrt{2}}{2}\frac{a}{a\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

$$|PS_{AC}| = a\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = a\frac{\sqrt{3}}{3}$$

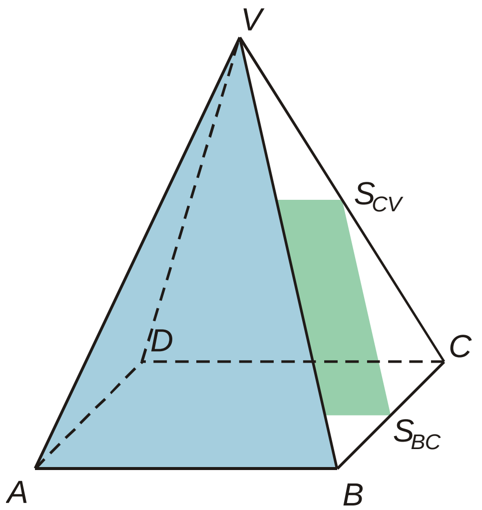
Dosadíme: $|PS_{AC}| = a\frac{\sqrt{3}}{3} = 4\frac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{cm} = 2{,}31\,\mathrm{cm}$

Pedagogická poznámka: V bodě b) studenti často píší, že vzdálenost rovin je nulová. Snažím se jim vysvětlit, že není rozumné u nerovnoběžných rovin tvrdit, že mají nulovou vzdálenost, když vzdálenosti různých bodů jedné z rovin od druhé roviny jsou zcela různé.
V bodě c) studenti často zapomenou na to, že vzdálenost musí zjišťovat pomocí kolmice a určí jako vzdálenost rovin délku úsečky $S_{AE}A$. Proto píšu na tabuli, že $2\,\mathrm{cm}$ nejsou správný výsledek.

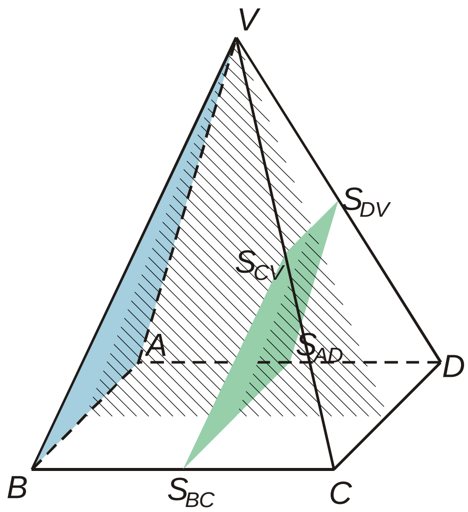
Pokud studentům ukážete prostorový obrázek první části řešení bodu d), nakreslí někteří správně obdélník *ACGE* i s průsečnicemi obou rovin, ale bod, s jehož pomocí zjišťují vzdálenost obou rovin nakreslí doprostřed (případně na úhlopříčku) a nedokáží pak v obrázku najít žádné použitelné trojúhelníky. Je potřeba jim zdůraznit, že mohou vybrat libovolný bod jedné z rovin a musí si proto zvolit tak, aby řešení bylo co nejjednodušší (pak jsou body na stranách obdélníku jasnou volbou).

Pedagogická poznámka: Následující příklad obsahuje trochu neobvyklý (i když často velice účinný) krok – použití pohledu z jiné strany. Pokud studenti nestíhají přerušuji práci na předchozích příkladech, abychom si alespoň začátek příkladu s nakreslením obou obrázků stihli a studenti zjistili, že není nutné kreslit pokaždé všechny obrázky ze stejného pohledu.

Př. 3: Je dán pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV*, $|AB| = a = 4\,\text{cm}$, $|SV| = v = 5\,\text{cm}$. Urči vzdálenost rovin *ABV* a $S_{BC}S_{CV}S_{AD}$.

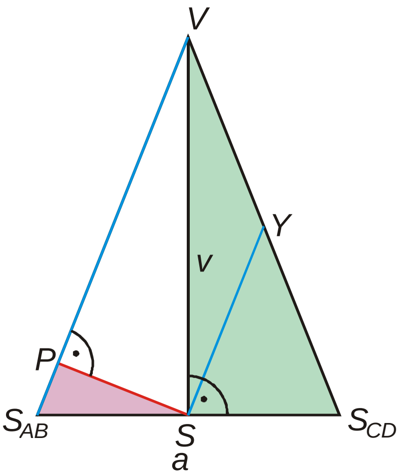


Situace je z tohoto pohledu nečitelná $\Rightarrow$ nakreslíme si obrázek tak, abychom místo hrany *AB* viděli přímo hranu *BC*.



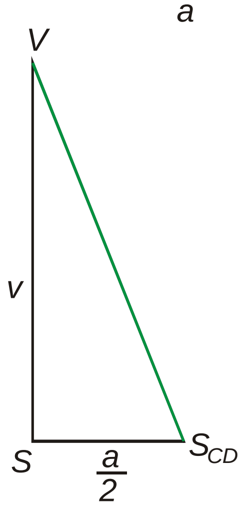
Z obrázku vidíme, že obě roviny jsou rovnoběžné (mají rovnoběžné průsečnice s rovinami podstavy a s rovinou *BCV*) $\Rightarrow$ má smysl hovořit o jejich vzdálenosti, kterou určíme pomocí průsečnic s rovinou $S_{AB}S_{CD}V$ (je kolmá k oběma rovinám).

Nakreslíme si trojúhelník $S_{AB}S_{CD}V$ a v něm průsečnice obou rovin:



- rovina ABV se s rovinou $S_{AB}S_{CD}V$ protíná v přímce $S_{AB}V$
- rovina $S_{BC}S_{CV}S_{AD}$ se s rovinou $S_{AB}S_{CD}V$ protíná v přímce YA

$\Rightarrow$ vzdálenost obou rovin můžeme určit například pomocí bodů SP z podobnosti trojúhelníků SPS_{AB} a $SS_{CD}V$.



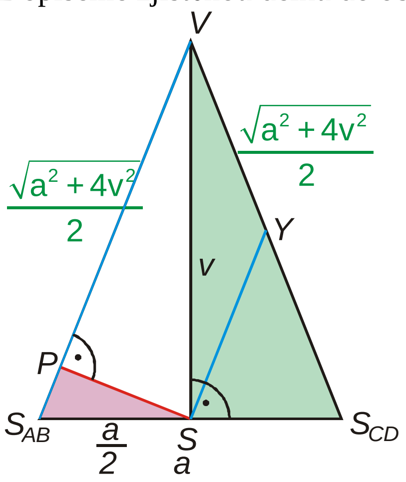
Délku strany $S_{CD}V$ určíme z trojúhelníka $SS_{CD}V$ pomocí Pythagorovy věty:

$$|S_{CD}V|^2 = |SV|^2 + |SS_{CD}|^2 = v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$|S_{CD}V|^2 = v^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{4v^2 + a^2}{4}$$

$$|S_{CD}V| = \frac{\sqrt{4v^2 + a^2}}{2}$$

Dopíšeme zjištěnou délku do obrázku:



Z podobnosti trojúhelníků $SS_{AB}P$ a $SS_{CD}V$.

$$\frac{|PS|}{|S_{AB}S|} = \frac{|SV|}{|S_{CD}V|} \Rightarrow |PS| = |S_{AB}S|\frac{|SV|}{|S_{CD}V|}$$

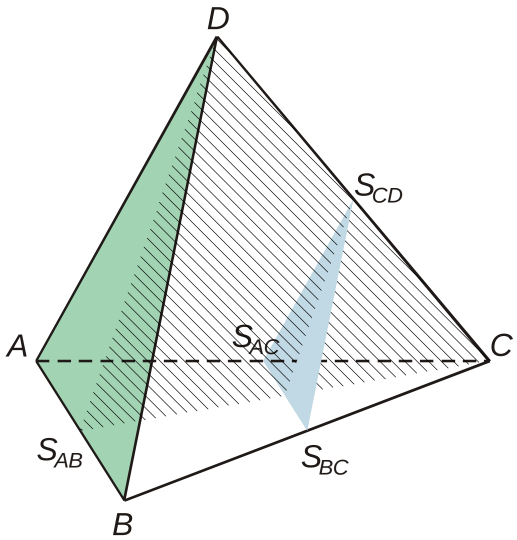
$$|PS| = |S_{AB}S|\frac{|SV|}{|S_{CD}V|} = \frac{a}{2}\frac{v}{\frac{\sqrt{a^2+4v^2}}{2}}$$

$$|PS| = \frac{2av}{2\sqrt{a^2+4v^2}} = \frac{av}{\sqrt{a^2+4v^2}}$$

Dosadíme: $|PS| = \frac{av}{\sqrt{a^2+4v^2}} = \frac{4\cdot 5}{\sqrt{4^2+4\cdot 5^2}}\,\text{cm} = 1{,}86\,\text{cm}$

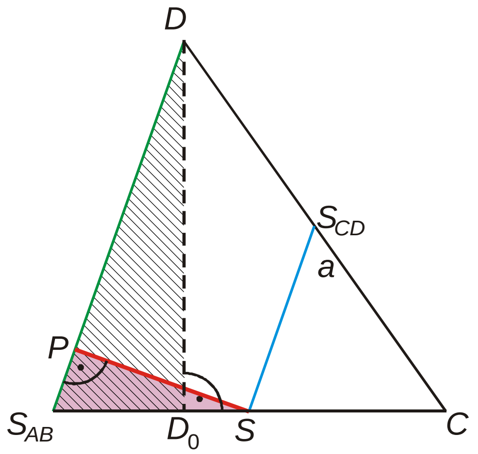
Pedagogická poznámka: Následující příklad je poměrně obtížný ve své početní fázi, kdy je nutné poměrně zdlouhavě počítat délky úseček.

Př. 4: Je dán pravidelný čtyřstěn *ABCD*, $|AB| = a = 6\,\text{cm}$. Urči vzdálenost rovin *ABC* a $S_{BC}S_{AC}S_{CD}$.



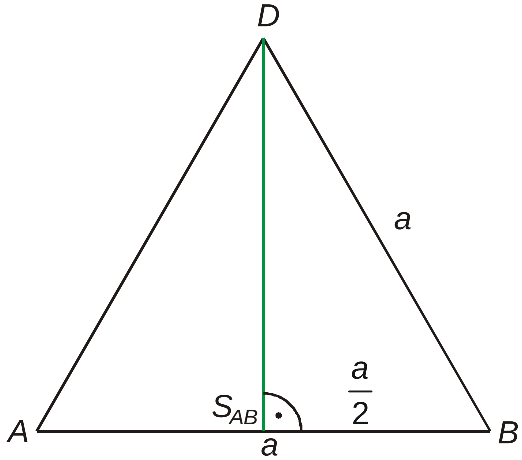
Z obrázku vidíme, že obě roviny jsou rovnoběžné (mají rovnoběžné průsečnice s rovinami podstavy a s rovinou *ACD*) $\Rightarrow$ má smysl hovořit o jejich vzdálenosti, kterou určíme pomocí průsečnic s rovinou $S_{AB}CD$ (je kolmá k oběma rovinám).

Nakreslíme si trojúhelník $S_{AB}CD$ a v něm průsečnice obou rovin:



- rovina *ABD* se s rovinou $S_{AB}CD$ protíná v přímce $S_{AB}D$
- rovina $S_{BC}S_{AC}S_{CD}$ se s rovinou $S_{AB}CD$ protíná v přímce SS_{CD}

$\Rightarrow$ vzdálenost obou rovin můžeme určit například pomocí bodů SP z podobnosti trojúhelníků SPS_{AB} a DD_0S_{AB}.



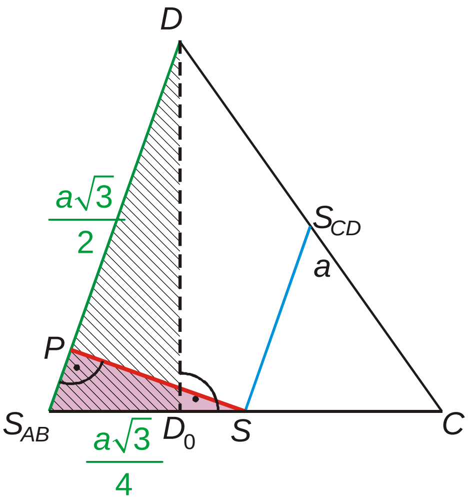
Délku výšky $S_{AB}D$ určíme z pravoúhlého trojúhelníka $S_{AB}BD$:

$$|S_{AB}D|^2 = |BD|^2 - |S_{AB}B|^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$|S_{AB}D|^2 = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$|S_{AB}D| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

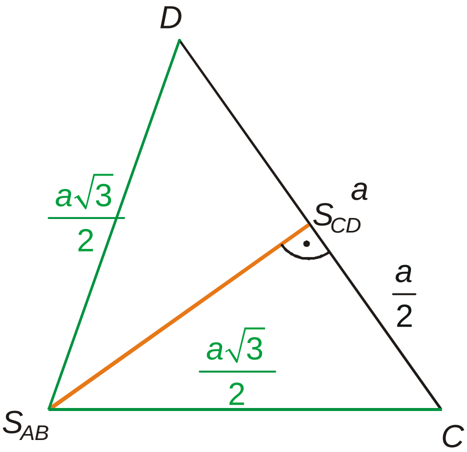
Dopíšeme zjištěnou délku do obrázku:



Platí: $|S_{AB}S| = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$, protože trojúhelník $S_{AB}CD$ je rovnoramenný.
Pokud chceme použít podobnost trojúhelníků SPS_{AB} a DD_0S_{AB} musíme určit výšku $|DD_0|$.
Použijeme vzorec pro obsah trojúhelníka:

$$S = \frac{av_a}{2} = \frac{bv_b}{2} \Rightarrow a \cdot v_a = b \cdot v_b$$

$\Rightarrow$ musíme určit výšku v trojúhelníku na stranu DC



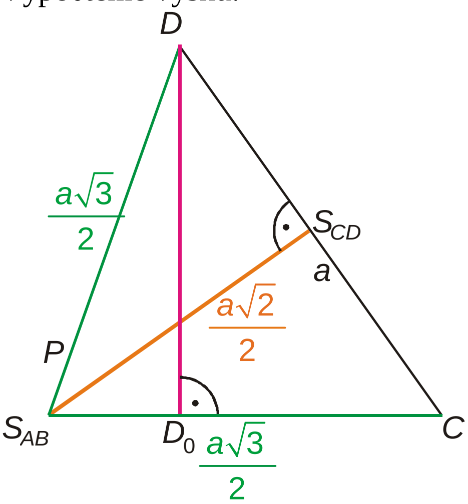
Délku výšky $S_{AB}S_{CD}$ určíme z pravoúhlého trojúhelníka $S_{AB}CS_{CD}$:

$$|S_{AB}S_{CD}|^2 = |S_{AB}C|^2 - |CS_{CD}|^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$|S_{AB}S_{CD}|^2 = \frac{3a}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$$

$$|S_{AB}S_{CD}| = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

Vypočteme výšku:

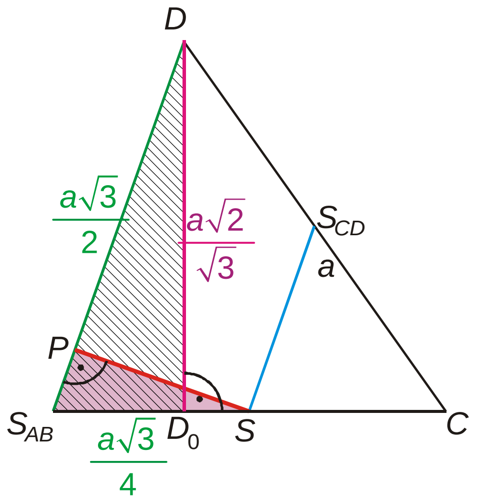


$$S = \frac{av_a}{2} = \frac{bv_b}{2} \Rightarrow a \cdot v_a = b \cdot v_b \Rightarrow v_a = \frac{b \cdot v_b}{a}$$

Dosadíme:

$$v_a = \frac{b \cdot v_b}{a} = \frac{|DC| \cdot |S_{AB}S_{DC}|}{|S_{AB}C|} = \frac{a \cdot a\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{a\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Doplníme výšku do původního obrázku a dopočteme vzdálenost rovin:



Z podobnosti trojúhelníků SPS_{AB} a DD_0S_{AB}.

$$\frac{|PS|}{|S_{AB}S|} = \frac{|D_0D|}{|S_{AB}D|} \Rightarrow |PS| = |S_{AB}S|\frac{|D_0D|}{|S_{AB}D|}$$

$$|PS| = |S_{AB}S|\frac{|D_0D|}{|S_{AB}D|} = \frac{a\sqrt{3}}{4}\frac{a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{a\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$|PS| = \frac{a \cdot 2\sqrt{3}\sqrt{2}}{4 \cdot 3} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Dosadíme: $|PS| = \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{6 \cdot \sqrt{6}}{6}\,\text{cm} = 2{,}45\,\text{cm}$

Př. 5: Petáková:
strana 93/cvičení 28 b)

Shrnutí: