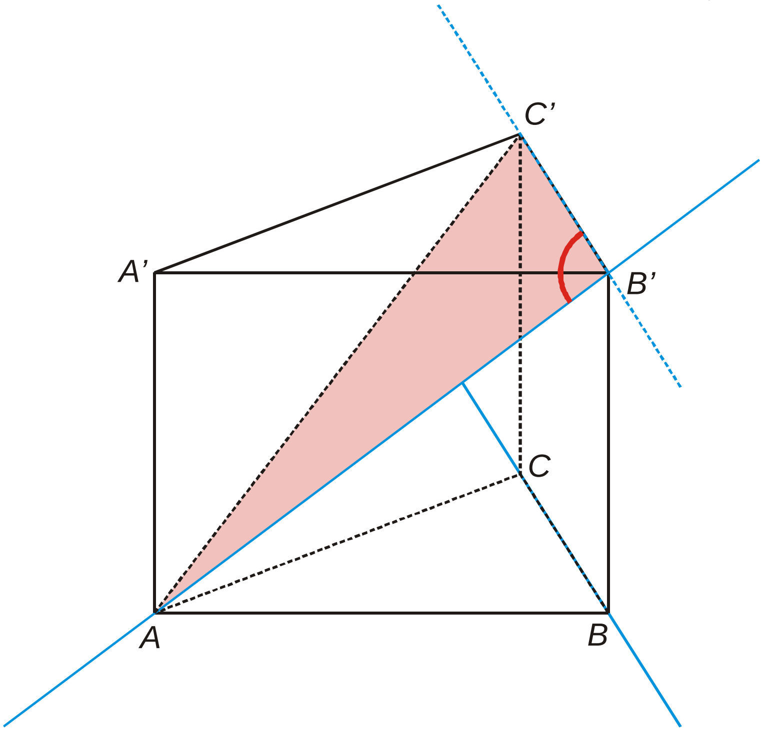
5.2.2 Odchylka přímek II

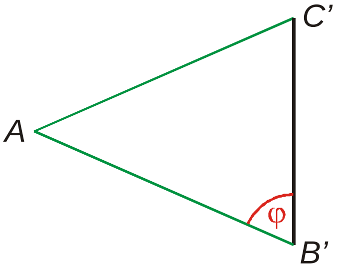
Předpoklady: 5201

Př. 1: Je dán pravidelný trojboký hranol *ABCA'B'C'*; $|AB| = a = 6\,\text{cm}$, $|AA'| = v = 4{,}5\,\text{cm}$. Urči odchylku přímek *BC* a *AB'*.

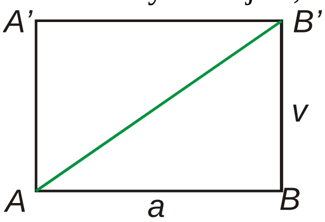
Přímky jsou mimoběžné $\Rightarrow$ musíme najít vhodnou rovnoběžku, například přímku rovnoběžnou s přímkou *BC* procházející bodem *B'*, tedy přímku *B'C'*.



Získáme trojúhelník $AB'C'$, ze kterého můžeme vypočíst úhel při vrcholu B'.
Trojúhelník $AB'C'$ si nakreslíme zvlášť a určíme délky jeho stran.



Délka strany $B'C'$ je *a*, strany AB' a AC' jsou stejné určíme je z obdélníku $ABB'A'$.

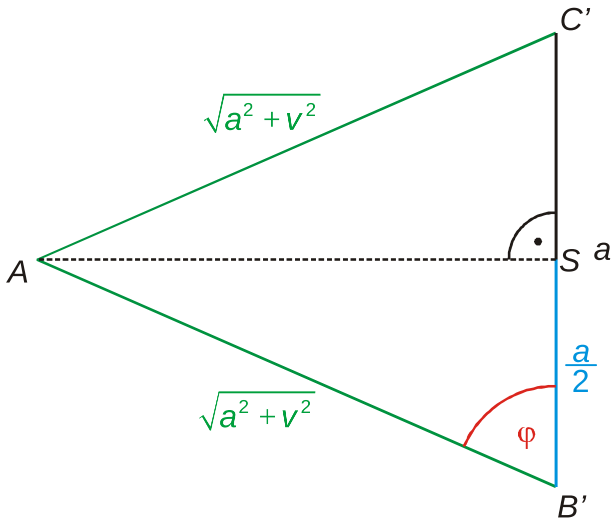


Pythagorova věta:

$$x^2 = a^2 + v^2$$

$$x = \sqrt{a^2 + v^2}\ .$$

Vrátíme se k trojúhelník $AB'C'$. Je rovnoramenný $\Rightarrow$ rozdělíme jej podle osy souměrnosti na dvě části:

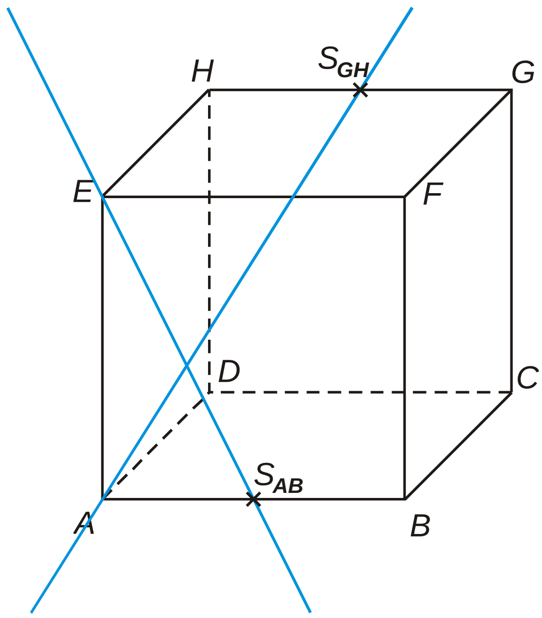


Úhel φ vypočteme z pravoúhlého trojúhelníku ASB':

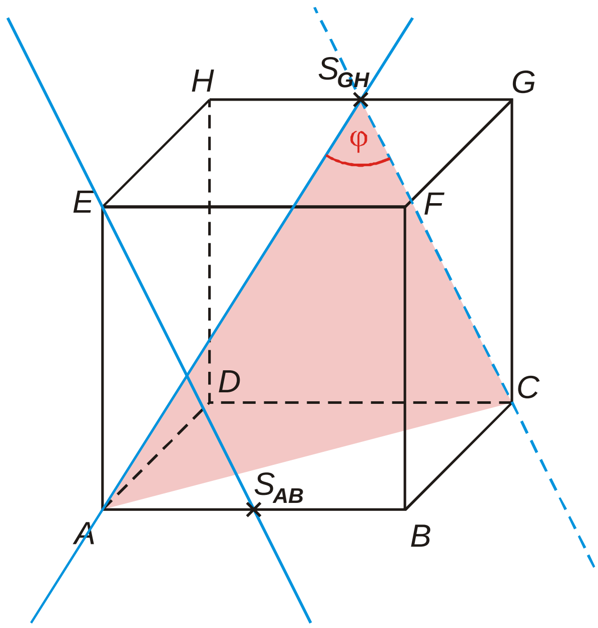
$$\cos\varphi = \frac{|SB'|}{|AB'|} = \frac{\frac{a}{2}}{x} = \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{a^2+v^2}} = \frac{a}{2\sqrt{a^2+v^2}}$$

Dosadíme: $\cos\varphi = \frac{a}{2\sqrt{a^2+v^2}} = \frac{6}{2\sqrt{6^2+4{,}5^2}} \Rightarrow \varphi = 66°25'$

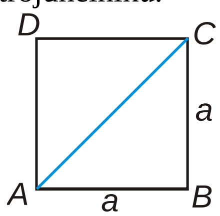
Př. 2: Je dána standardní krychle *ABCDEFGH*. Urči odchylku přímek AS_{GH}, $S_{AB}E$.



Přímky jsou mimoběžné $\Rightarrow$ musíme najít vhodnou rovnoběžku, například přímku rovnoběžnou s přímkou $S_{AB}E$ procházející bodem S_{GH}.



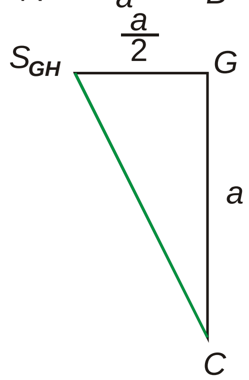
Získáme trojúhelník ACS_{GH}, ve kterém určujeme úhel u vrcholu S_{GH}.
Neznám ani jednu ze stran $\Rightarrow$ postupně je určujeme z dalších trojúhelníků.



Strana AC ze čtverce $ABCD$:

$$x^2 = a^2 + a^2$$

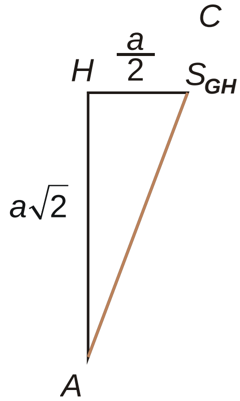
$$x = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$



Strana $S_{GH}C$ z trojúhelníku CGS_{GH}:

$$x^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$$

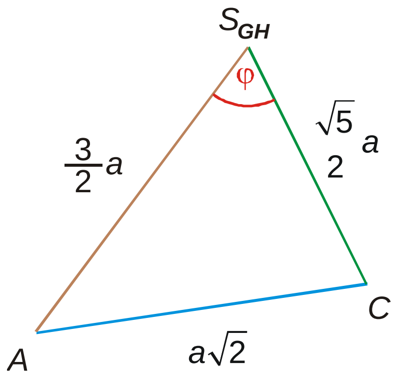
$$x = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$



Strana AS_{GH} z trojúhelníku AHS_{GH}:

$$x^2 = \left(\sqrt{2}a\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 2a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{9a^2}{4}$$

$$x = \sqrt{\frac{9a^2}{4}} = \frac{3}{2}a$$



Známe všechny strany trojúhelníka, pomocí kosinové věty můžeme určit libovolný úhel:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Dosadíme: $a = a\sqrt{2}$, $b = a\frac{\sqrt{5}}{2}$, $c = a\frac{3}{2}$

$$\cos\alpha = \frac{\left(a\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(a\frac{3}{2}\right)^2 - \left(a\sqrt{2}\right)^2}{2\left(a\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(a\frac{3}{2}\right)} = \frac{a^2\frac{5}{4} + a^2\frac{9}{4} - 2a^2}{a^2\sqrt{5}\frac{3}{2}} = \frac{a^2\left(\frac{5+9-8}{4}\right)}{a^2\frac{3\sqrt{5}}{2}} = \frac{\frac{6}{4}}{\frac{3\sqrt{5}}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \alpha = 63°26'$$

Př. 3: Je dán pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV*; $|AB| = a = 5\,\text{cm}$, $|AV| = b = 7\,\text{cm}$. Urči odchylku přímek *CV* a AS_{DV}.

Př. 4: Petáková:
strana 94/cvičení 31 b) e) f) i)

Shrnutí: