

### 4.3.8 Vzorce pro součet goniometrických funkcí

#### Vzorce pro součet goniometrických funkcí:

- $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$
- $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$
- $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$
- $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$

**Př. 1:** Uprav na součin výrazy.

a)  $\sin 2x + \sin 4x$

b)  $\cos 5a + \cos 3a$

c)  $\sin 3x - \sin(x + \pi)$

d)  $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$

**Př. 2:** Urči definiční obor výrazu  $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$  a pak jej zjednoduš využitím vzorců pro součet goniometrických funkcí.

**Př. 3:** Vypočti.

a)  $\sin 105^\circ - \sin 15^\circ$

b)  $\frac{\cos 70^\circ - \cos 10^\circ}{\sin 70^\circ + \sin 10^\circ}$

**Př. 4:** Vyřeš rovnici  $\sin 5x = \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Př. 5:** Vyřeš rovnici  $\sin 5x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Př. 6:** Vyřeš rovnici  $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$ .

Vzorce pro součet goniometrických funkcí se odvozují ze součtových vzorců, na základě

následujících rovností:  $x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}$ ,  $y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$ .

$$\sin x + \sin y = \sin\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) + \sin\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right)$$

Nyní použijeme pro vnitřek prvního sinu vzorec  $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ :

$$\sin\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) = \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} + \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

Nyní použijeme pro vnitřek druhého sinu vzorec  $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$ :

$$\sin\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right) = \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} - \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

Po sečtení získáme:  $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ .

**Př. 7:** (BONUS) Odvoď vzorec pro  $\cos x + \cos y$ .

$$\cos x + \cos y = \cos \left( \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \right) + \cos \left( \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} \right)$$

Nyní použijeme pro vnitřek prvního kosinu vzorec  $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ :

$$\cos \left( \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \right) = \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} - \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

Nyní použijeme pro vnitřky druhého sinu vzorec  $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ :

$$\cos \left( \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} \right) = \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} + \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

Po sečtení získáme:  $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ .

**Př. 8:** Petáková:

strana 47, cvičení 60 a), e)

strana 54, cvičení 21 c), e)

strana 54, cvičení 22 a)