4.3.1 Goniometrické rovnice

Předpoklady: 4216, 4217

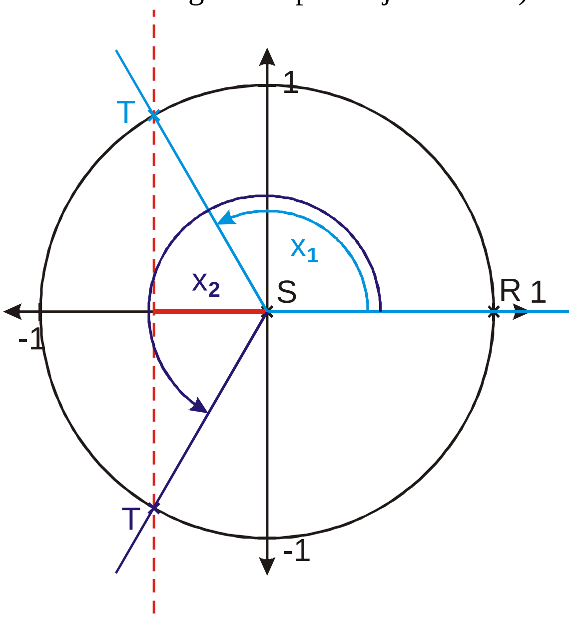
Názvosloví:

- **Goniometrické rovnice**: rovnice, ve kterých se neznámá objevuje uvnitř goniometrických funkcí.
- **Základní goniometrická rovnice**: každá rovnice zapsaná ve tvaru $g(x)=a$, kde $g(x)$ je jedna z goniometrických funkcí (sin, cos, tg, cotg), $a\in R$, $x\in R$.
- **Základní řešení základní goniometrické rovnice**: množina všech kořenů z intervalu $\langle 0;2\pi)$.

  Důvod: Opakování úhlů po 2π (trochu prázdný pojem, protože většina rovnic není základních a jejich kořeny se pak nemusejí opakovat po 2π).

Př. 1: Vyřeš rovnici $\cos x=-\frac{1}{2}$.

Hledáme všechna $x\in R$, pro něž platí $\cos x=-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ to už umíme (pomocí jednotkové kružnice nebo grafu odpovídající funkce).



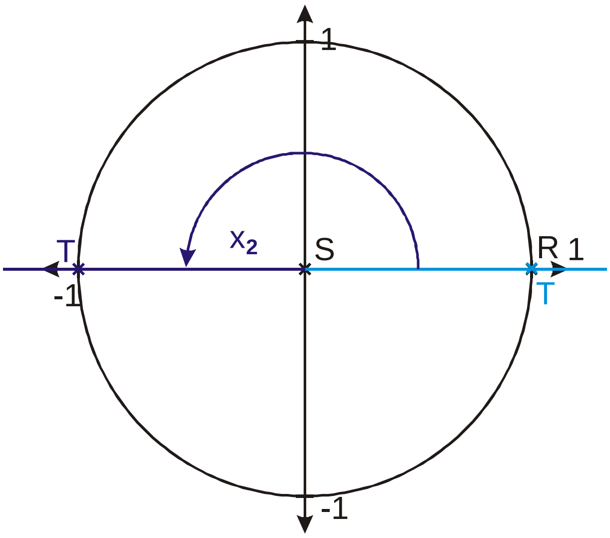
Z obrázku je vidět, že řešením jsou třetinové úhly $\frac{2}{3}\pi$ a $\frac{4}{3}\pi$.

Základní řešení : $\frac{2}{3}\pi;\frac{4}{3}\pi$.

$$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{2}{3}\pi+k\cdot 2\pi;\frac{4}{3}\pi+k\cdot 2\pi\right\}$$

Př. 2: Vyřeš rovnici $\sin x=0$.

Stejné jako předchozí příklad.

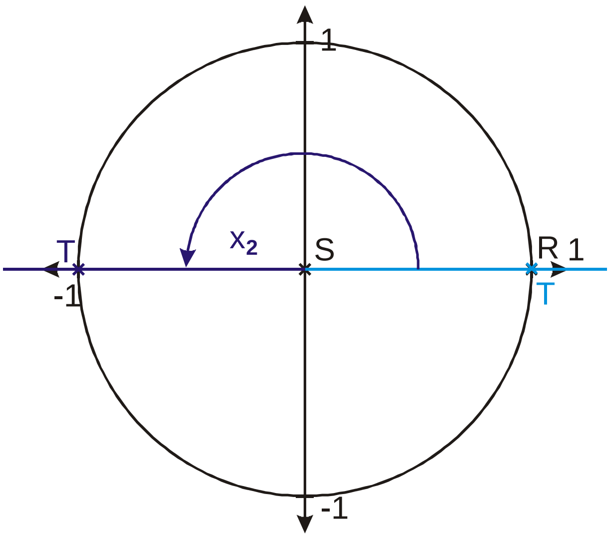


Základní řešení : $0;\pi$.

$K=\bigcup_{k\in Z}\{0+k\cdot 2\pi;\pi+k\cdot 2\pi\}$

Úspornější zápis: $K=\bigcup_{k\in Z}\{0+k\cdot\pi\}$

Př. 3: Vyřeš rovnici $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

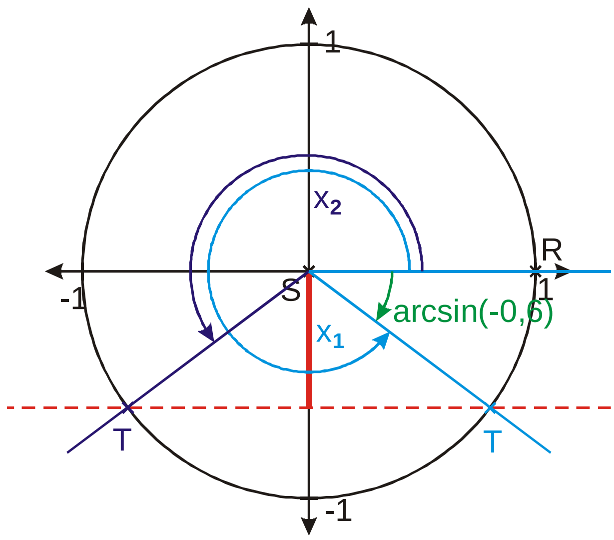


Základní řešení : $\frac{4}{3}\pi;\frac{5}{3}\pi$.

$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{4}{3}\pi+k\cdot 2\pi;\frac{5}{3}\pi+k\cdot 2\pi\right\}$

Př. 4: Vyřeš rovnici $\sin x=-0,6$.

-0,6 není tabulková hodnota $\Rightarrow$ úhel x můžeme určit pouze přibližně nebo jako hodnotu funkce arcsin . Přibližná hodnota stanovená pomocí kalkulačky je rovna $\arcsin(-0,6)\doteq -36°52'$ $\Rightarrow$ $\arcsin(-0,6)$ je tedy záporné číslo, které nepatří do intervalu $\langle 0;2\pi)$ a není tedy základním řešením.



Úhly x_1 a x_2 můžeme vyjádřit dvěma způsoby:

a) pomocí záporného úhlu $\arcsin(-0,6)$

$x_1 = 2\pi + \arcsin(-0,6)$ $\qquad$ $x_2 = \pi - \arcsin(-0,6)$

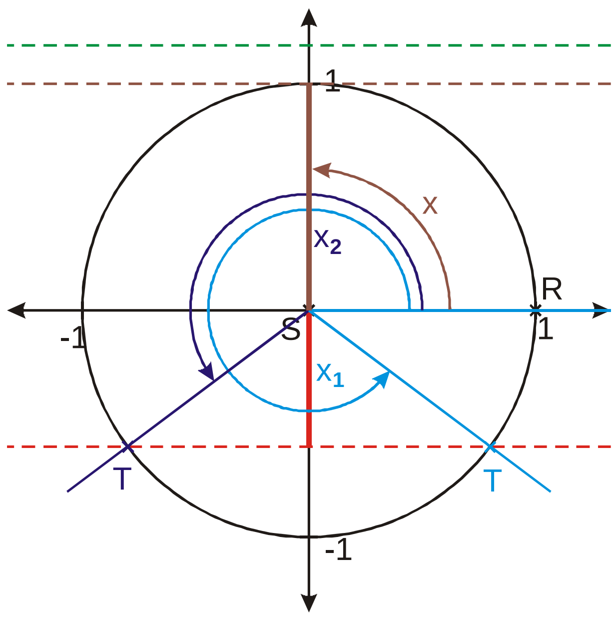
$$K = \bigcup_{k\in Z}\{\pi - \arcsin(-0,6) + k\cdot 2\pi; 2\pi + \arcsin(-0,6) + k\cdot 2\pi\}$$

b) pomocí kladného úhlu $\arcsin 0,6$

$x_1 = 2\pi - \arcsin 0,6$ $\qquad$ $x_2 = \pi + \arcsin 0,6$

$$K = \bigcup_{k\in Z}\{\pi + \arcsin 0,6 + k\cdot 2\pi; 2\pi - \arcsin 0,6 + k\cdot 2\pi\}$$

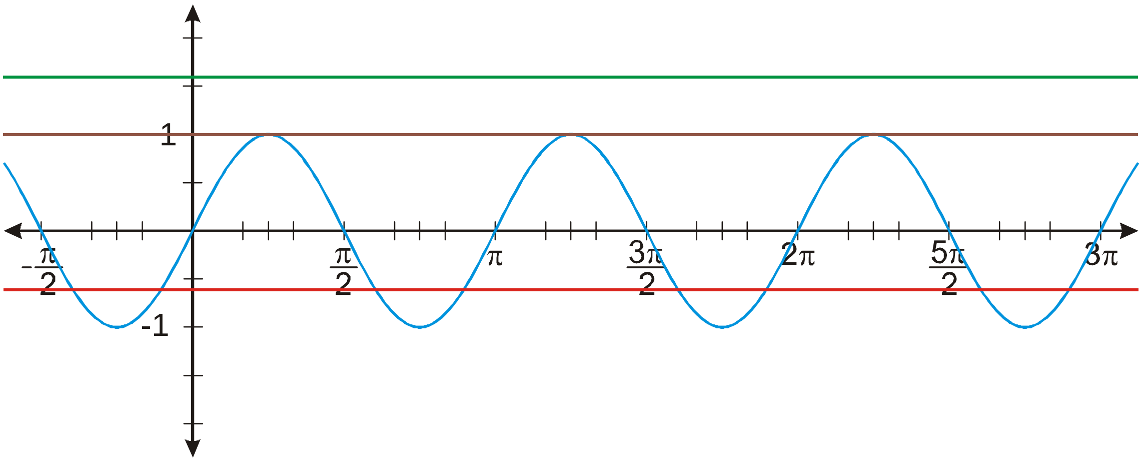
Př. 5: Rozhodni, pro která $a \in R$ má rovnice $\sin x = a$ řešení.



Z obrázku je zřejmé, že pro:

- $a \in (-1;1)$ má rovnice v intervalu $\langle 0; 2\pi)$ dvě řešení (červená čára).
- $a = \pm 1$ má rovnice v intervalu $\langle 0; 2\pi)$ jedno řešení (hnědá čára).
- $a \in (-\infty;-1) \cup (1;\infty)$ nemá rovnice v intervalu $\langle 0; 2\pi)$ žádné řešení (zelená čára).

Stejný závěr dostaneme pomocí grafu:



Rovnice $\sin x = a$ má řešení pro $a \in \langle -1;1 \rangle$.

V dalších příkladech již nebudeme kreslit kružnice a budeme pokládat vyřešení základní goniometrické rovnice za samozřejmost.

Př. 6: Vyřeš rovnici $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

Platí: $\operatorname{tg}\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\sqrt{3}$, funkce $y = \operatorname{tg} x$ je periodická s nejmenší periodou π.

$$K = \bigcup_{k \in Z}\left\{\frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi\right\}$$

Př. 7: Vyřeš rovnici $\operatorname{tg} x = 5$.

5 není tabulková hodnota funkce $y = \operatorname{tg} x$, funkce $y = \operatorname{tg} x$ je periodická s nejmenší periodou π.

$$K = \bigcup_{k \in Z}\{\operatorname{arctg} 5 + k \cdot \pi\}$$

Př. 8: Vyřeš rovnici $1 - (\sin x - 1) = 2 - \sqrt{3}\left(\sqrt{3}\sin x - 1\right)$.

Problém: $\sin x$ se nachází uvnitř složitějších výrazů, neznáme jeho hodnotu.

Substituce: $y = \sin x$.

$$1 - (y - 1) = 2 - \sqrt{3}\left(\sqrt{3} \cdot y - 1\right)$$

$$2 - y = 2 - 3y + \sqrt{3}$$

$$2y = \sqrt{3}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Návrat k původní proměnné:

$$y = \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Základní řešení : $\frac{\pi}{3};\frac{2}{3}\pi$, funkce $y=\sin x$ je periodická s nejmenší periodou 2π.

$$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{1}{3}\pi+k\cdot 2\pi;\frac{2}{3}\pi+k\cdot 2\pi\right\}$$

Př. 9: Vyřeš rovnici $\dfrac{\cos x+\cos\pi}{\sin\left(\frac{7}{6}\pi\right)\cos x}=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+1$.

Problém: V rovnici se vyskytují hodnoty goniometrických funkcí neobsahujících x
$\Rightarrow$ dosadíme za ně hodnoty:

$$\frac{\cos x+(-1)}{\left(-\frac{1}{2}\right)\cos x}=1+1.$$

$$\frac{\cos x-1}{\left(-\frac{1}{2}\right)\cos x}=2$$

Problém: V rovnici je $\cos x$ víckrát $\Rightarrow$ substituce.

Substituce: $y=\cos x$.

$$\frac{y-1}{\left(-\frac{1}{2}\right)y}=2 \quad /\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)y \qquad \text{podmínka: } y\neq 0$$

$$y-1=-y$$

$$2y=1$$

$$y=\frac{1}{2}$$

Návrat k původní proměnné:

$$y=\cos x=\frac{1}{2}$$

$$\cos x=\frac{1}{2}$$

$$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{1}{3}\pi+k\cdot 2\pi;\frac{5}{3}\pi+k\cdot 2\pi\right\}$$

Př. 10: Petáková strana 52, cvičení 3 b), d)

Př. 11: Vyřeš rovnici $2\sin^2 x+3\sin x-2=0$.

Problém: V rovnici se vyskytují hodnoty goniometrických funkcí v druhé mocnině.
$\Rightarrow$ substituce.

Substituce: $y=\sin x$

$$2y^2+3y-2=0$$

$$y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot2\cdot(-2)}}{2\cdot2}=\frac{-3\pm5}{4}$$

$$y_1=\frac{-3+5}{4}=\frac{1}{2}$$

$$y_2=\frac{-3-5}{4}=-2$$

Návrat k původní proměnné:

$$y_1=\sin x_1=\frac{1}{2}$$

$$K_1=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{1}{6}\pi+k\cdot2\pi;\frac{5}{6}\pi+k\cdot2\pi\right\}$$

$$y_2=\sin x_2=-2$$

$$K_2=\emptyset$$

$$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{1}{6}\pi+k\cdot2\pi;\frac{5}{6}\pi+k\cdot2\pi\right\}$$

Př. 12: Petáková strana 52, cvičení 7 b)

Př. 13: Vyřeš rovnici $\mathrm{tg}\,2x=-1$.

Problém: Uvnitř tangens není pouze *x*, ale složitější výraz.

Substituce: $y=2x$

$$\mathrm{tg}\,y=-1$$

$$y=\frac{3}{4}\pi+k\cdot\pi$$

Návrat k původní proměnné:

$$y=2x=\frac{3}{4}\pi+k\cdot\pi$$

$$2x=\frac{3}{4}\pi+k\cdot\pi \qquad /:2$$

$$x=\frac{3}{8}\pi+k\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{3}{8}\pi+k\cdot\frac{\pi}{2}\right\}$$

Př. 14: Vyřeš rovnici $\cos 0,5x=\frac{1}{2}$.

Problém: Uvnitř sinu není pouze *x*, ale složitější výraz.

Substituce: $y=0,5x$

$$\sin y=\frac{1}{2}$$

$$y_1=\frac{\pi}{3}+k\cdot2\pi$$

$$y_2=\frac{5}{3}\pi+k\cdot2\pi$$

Návrat k původní proměnné:

$$y_1=0,5x_1=\frac{\pi}{3}+k\cdot2\pi$$

$$y_1=0,5x_1=\frac{5}{3}\pi+k\cdot2\pi$$

$0,5x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \qquad / \cdot 2$

$x_1 = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 4\pi$

$K_1 = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{2}{3}\pi + k \cdot 4\pi \right\}$

$0,5x_1 = \frac{5}{3}\pi + k \cdot 2\pi \qquad / \cdot 2$

$x_1 = \frac{10}{3}\pi + k \cdot 4\pi$

$K_1 = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{10}{3}\pi + k \cdot 4\pi \right\}$

$K_1 = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{2}{3}\pi + k \cdot 4\pi; \frac{10}{3}\pi + k \cdot 4\pi \right\}$

Př. 15: Vyřeš rovnici $\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Problém: Uvnitř sinu není pouze *x*, ale složitější výraz.

Substituce: $y = 3x - \frac{\pi}{2}$

$\sin y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$y_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \qquad y_2 = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

Návrat k původní proměnné:

$y_1 = 3x_1 - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$

$3x_1 - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \qquad / + \frac{\pi}{2}$

$3x_1 = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \qquad / : 3$

$x_1 = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

$K_1 = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \right\}$

$y_2 = 3x_2 - \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$3x_2 - \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \qquad / + \frac{\pi}{2}$

$3x_2 = \frac{5}{4}\pi + k \cdot 2\pi \qquad / : 3$

$x_2 = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

$K_2 = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{5}{12}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \right\}$

$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi; \frac{5}{12}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \right\}$

Dodatek: Při použití substituce je nutné psát při návratu k původní proměnné hned všechna řešení i ta dosahovaná díky periodičnosti funkce $3x_1 - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$. Pokud na periodu zapomeneme (šetřící studenti to často dělají, dojdeme ke špatnému výsledku).

Špatný postup: $3x_1 = \frac{3}{4}\pi \qquad / : 3$

$x_1 = \frac{3}{4}\pi$

$K_1 = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \right\}$.

Př. 16: Petáková strana 52, cvičení 6 b), d), h), i)

Shrnutí: