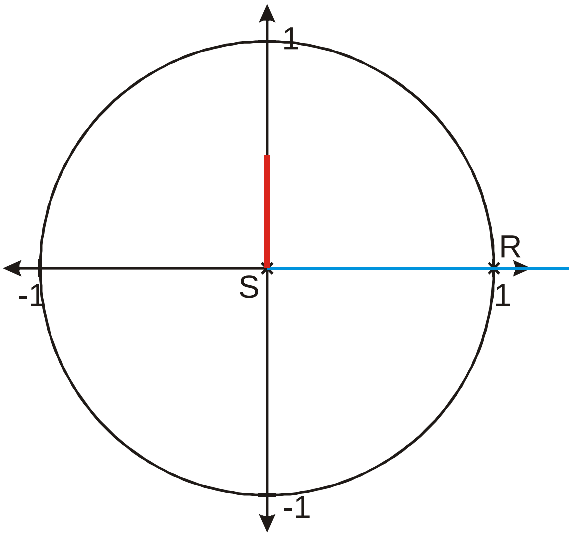
4.2.11 Hledání úhlů se známou hodnotou goniometrické funkce

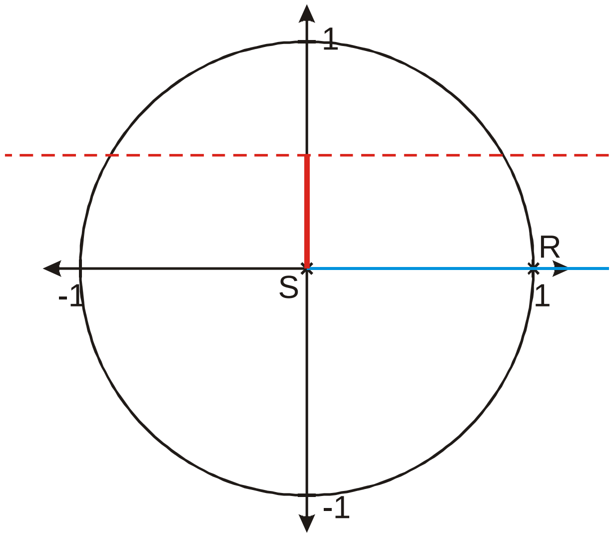
Předpoklady: 4210

Př. 1: Najdi všechny úhly $x \in \langle 0; 2\pi)$, pro které platí $\sin x = \frac{1}{2}$.

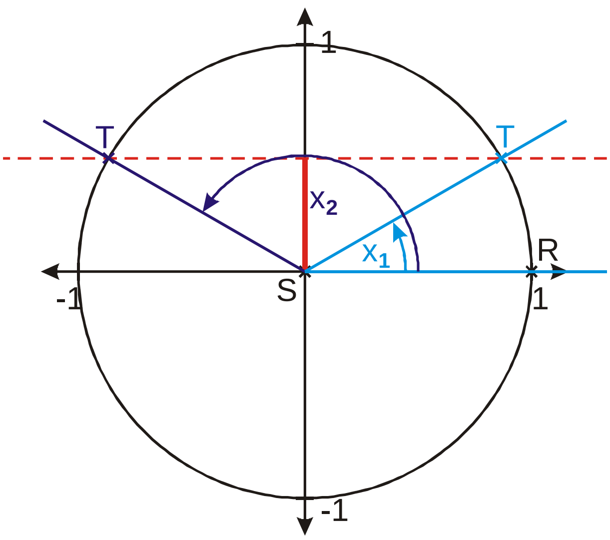
Postřeh: Obrácená úloha než dosud. Zatím jsme hledali pro úhly hodnoty goniometrických funkcí, teď hledáme k hodnotám úhly $\Rightarrow$ stačí si pamatovat tabulku a víme, že $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Hledané číslo je $x = \frac{\pi}{6}$. Je to jediná možnost? $\Rightarrow$ $\sin x$ je y-ová hodnota souřadnice bodu na jednotkové kružnici, vyznačíme ji na y-ové ose.





Vyznačíme všechny body, jejichž y-ová souřadnice je $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ vodorovná přímka $y = \frac{1}{2}$.
Vyznačená přímka se protíná s kružnicí ve dvou bodech $\Rightarrow$ existují dva úhly, pro které platí $\sin x = \frac{1}{2}$.

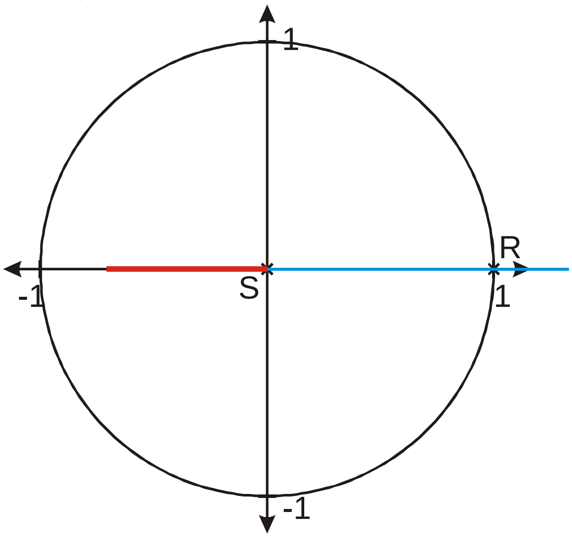


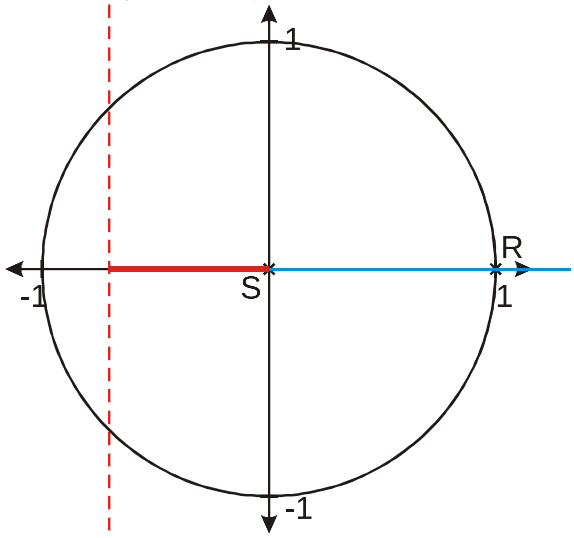
Již víme, že $x_1 = \frac{\pi}{6}$ (protože $\frac{1}{2}$ je „malá“ tabulková hodnota funkce sinus, musí být x_1 šestinová hodnota). Z obrázku je vidět, že platí $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$.

V intervalu $\langle 0; 2\pi)$ existují dvě čísla x, pro které platí $\sin x = \frac{1}{2}$: $x_1 = \frac{\pi}{6}$ a $x_2 = \frac{5}{6}\pi$.

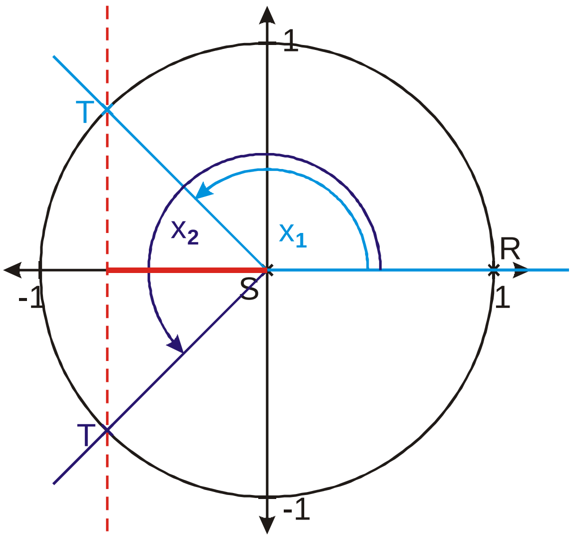
Př. 2: Najdi všechny úhly $x \in \langle 0; 2\pi)$ pro které platí $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\cos x$ je x-ová hodnota souřadnice bodu na kružnici, vyznačíme ji na x-ové ose.





Vyznačíme všechny body, jejichž x-ová souřadnice je $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow$ svislá přímka $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Vyznačená přímka se protíná s kružnicí ve dvou bodech $\Rightarrow$ existují dva úhly, pro které platí $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



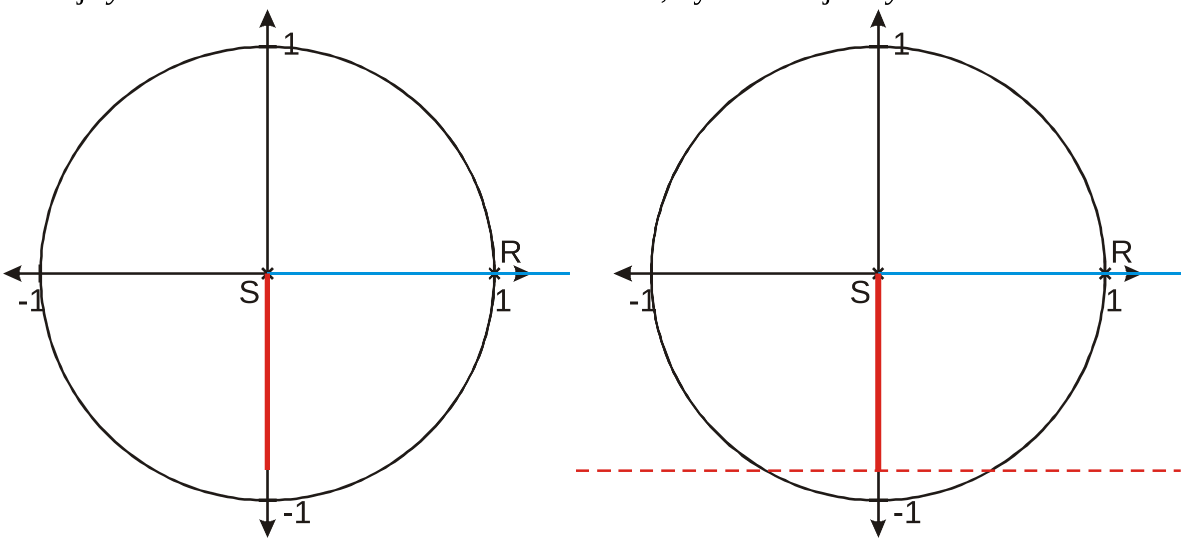
Protože $\frac{\sqrt{2}}{2}$ je „střední“ tabulková hodnota funkce cosinus, musí být x_1 a x_2 čtvrtinové hodnoty. Z obrázku je vidět, že platí $x_1 = \frac{3}{4}\pi$ a $x_2 = \frac{5}{4}\pi$.

V intervalu $\langle 0; 2\pi)$ existují dvě čísla *x*, pro které platí $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$: $x_1 = \frac{3}{4}\pi$ a $x_2 = \frac{5}{4}\pi$.

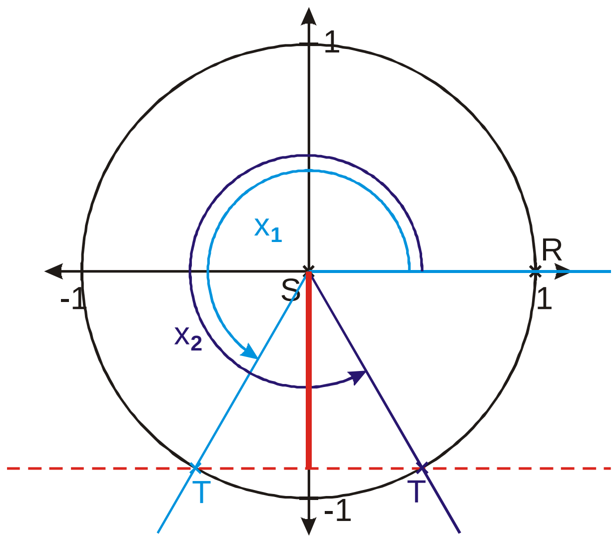
Př. 3: Najdi všechny úhly, pro které platí $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Postřeh: Nehledáme hodnoty pouze v intervalu $\langle 0; 2\pi)$, ale v celém *R*. Stejně jako v předchozích příkladech najdeme nejdříve hodnoty v intervalu $\langle 0; 2\pi)$ a pak využijeme periodicitu funkce $\sin x$ a určíme všechny možné hodnoty *x*.

$\sin x$ je *y*-ová hodnota souřadnice bodu na kružnici, vyznačíme ji na *y*-ové ose.



Vyznačíme všechny body, jejichž *y*-ová souřadnice je $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ vodorovná přímku $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Vyznačená přímka se protíná s kružnicí ve dvou bodech $\Rightarrow$ existují dva úhly, pro které platí $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Protože $\frac{\sqrt{3}}{2}$ je „velká" tabulková hodnota funkce sinus, musí být x_1 a x_2 třetinové hodnoty.

Z obrázku je vidět, že platí $x_1 = \frac{4}{3}\pi$ a $x_2 = \frac{5}{3}\pi$.

V intervalu $\langle 0; 2\pi)$ existují dvě čísla *x*, pro které platí $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$: $x_1 = \frac{4}{3}\pi$ a $x_2 = \frac{5}{3}\pi$.

Hledáme všechna $x \in R$, pro která platí $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Funkce $y = \sin x$ je periodická s nejmenší periodou 2π $\Rightarrow$ hodnoty funkce pro x_1 jsou stejné jako hodnoty funkce pro $x_1 + k \cdot 2\pi$, $k \in Z$.

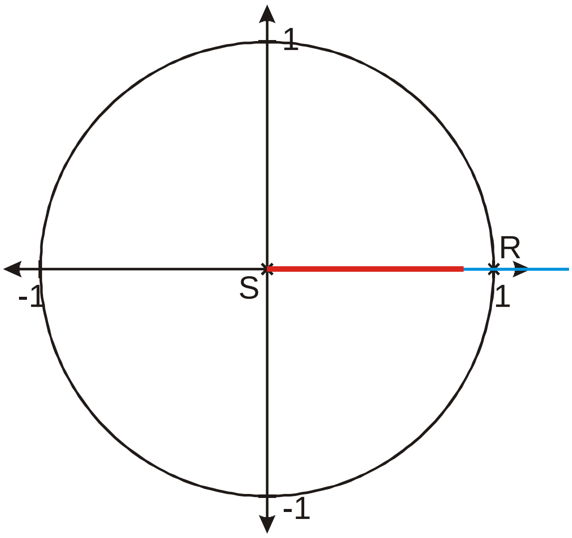
Požadovanou vlastnost mají všechna čísla $\frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ a $\frac{5}{3}\pi + k \cdot 2\pi$, kde $k \in Z$. Tato množina čísel se většinou zapisuje $\bigcup_{k \in Z} = \left\{ \frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi; \frac{5}{3}\pi + k \cdot 2\pi \right\}$.

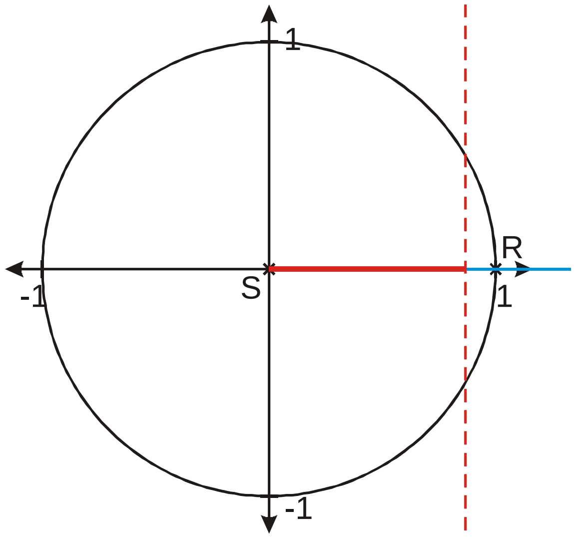
Př. 4: Najdi všechny úhly $x \in R$, pro které platí $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \wedge \sin x < 0$.

Příklad vyřešíme nejdříve v intervalu $\langle 0; 2\pi)$ a pak najdeme ostatní řešení z *R*.

Jako první hledáme *x* splňující podmínku $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

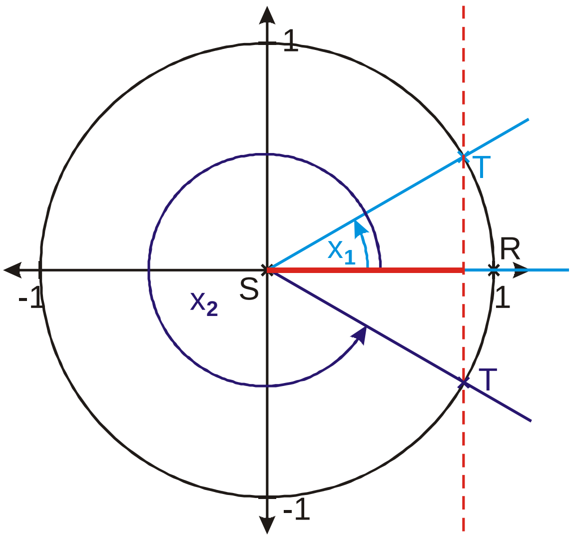
$\cos x$ je *x*-ová hodnota souřadnice bodu na kružnici, vyznačíme ji na *x*-ové ose.





Vyznačíme všechny body, jejichž x-ová souřadnice je $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ svislá přímka $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

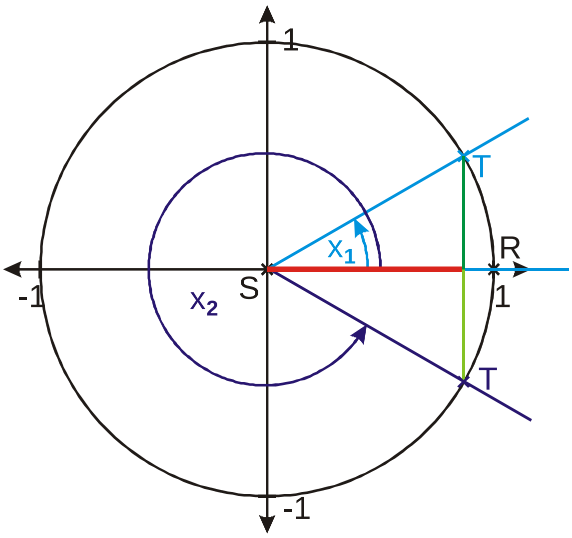
Vyznačená přímka se protíná s kružnicí ve dvou bodech $\Rightarrow$ existují dva úhly, pro které platí $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Protože $\frac{\sqrt{3}}{2}$ je „velká" tabulková hodnota funkce cosinus, musí být x_1 a x_2 šestinové hodnoty. Z obrázku je vidět, že platí $x_1 = \frac{\pi}{6}$ a $x_2 = \frac{11}{6}\pi$.

V intervalu $\langle 0; 2\pi)$ existují dvě čísla x, pro které platí $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$: $x_1 = \frac{\pi}{6}$ a $x_2 = \frac{11}{6}\pi$.

Teď splníme druhou podmínku $\sin x < 0$. Dokreslíme do obrázku hodnoty funkce $\sin x$ pro oba úhly.



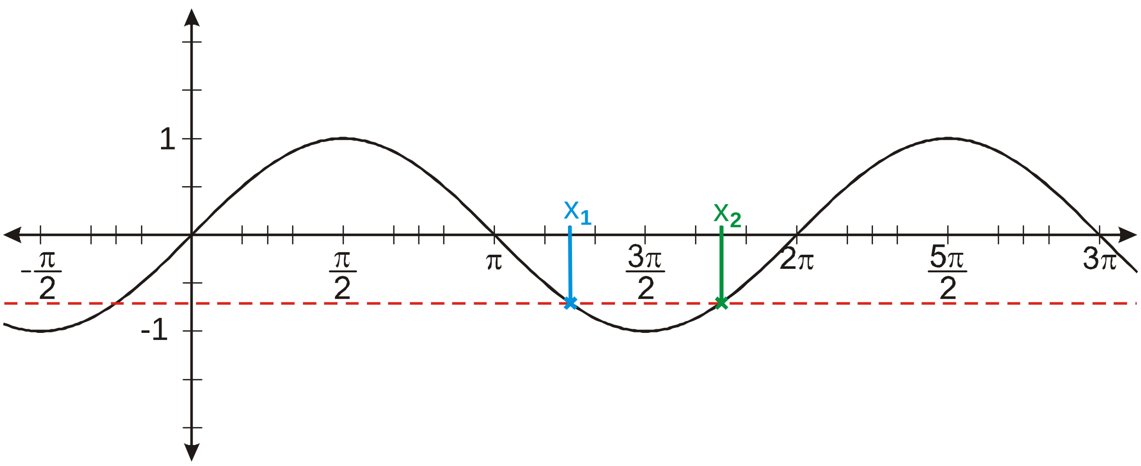
Z obrázku je zřejmé, že platí $\sin x_1 = \sin\frac{\pi}{6} > 0$ a $\sin x_2 = \sin\frac{11}{6}\pi < 0$.

Zadání příkladu $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \wedge \sin x < 0$ splňuje v intervalu $\langle 0; 2\pi)$ pouze úhel $x_2 = \frac{11}{6}\pi$.
Obě funkce jsou periodické s nejmenší periodou 2π $\Rightarrow$ řešením příkladu jsou všechna x z množiny: $\bigcup_{k\in Z} = \left\{\frac{11}{6}\pi + k\cdot 2\pi\right\}$.

Všechny předchozí příklady je možné řešit nejen pomocí jednotkové kružnice, ale i pomocí grafů funkcí $y = \sin x$ a $y = \cos x$.

Př. 5: Najdi všechny úhly $x \in R$, pro které platí $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Při řešení využij graf funkce $y = \sin x$.

V obrázku s grafem funkce $y = \sin x$ vyznačíme všechny body, jejichž y-ová souřadnice (hodnota funkce $y = \sin x$) je $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow$ přímka $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Vyznačená přímka se v intervalu $\langle 0;2\pi)$ protíná s grafem ve dvou bodech $\Rightarrow$ existují dva úhly z intervalu $\langle 0;2\pi)$, pro které platí $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

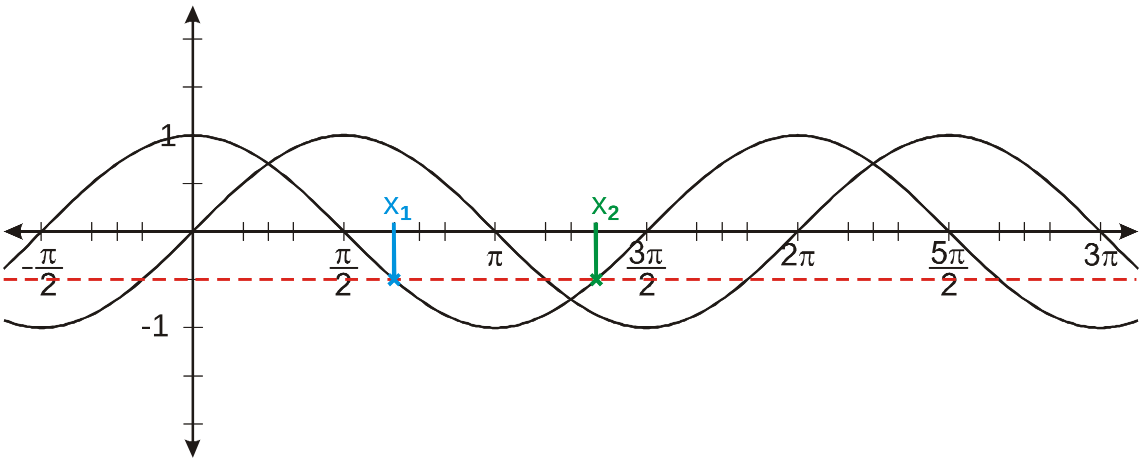
Protože $\frac{\sqrt{2}}{2}$ je „střední“ tabulková hodnota funkce sinus, musí být x_1 a x_2 čtvrtinové hodnoty. Z obrázku je vidět, že platí $x_1 = \frac{5}{4}\pi$ a $x_2 = \frac{7}{4}\pi$.

Funkce sinus je periodická s nejmenší periodou 2π $\Rightarrow$ hledaná čísla tvoří množinu

$\bigcup_{k\in Z} = \left\{ \frac{5}{4}\pi + k\cdot 2\pi; \frac{7}{4}\pi + k\cdot 2\pi \right\}$.

Př. 6: Najdi všechny úhly $x \in R$, pro které platí $\cos x = -\frac{1}{2} \wedge \sin x < 0$. Při řešení využij grafy funkcí sinus a cosinus.

V obrázku s grafy funkcí $y = \cos x$ vyznačíme všechny body, jejichž y-ová souřadnice (hodnota funkce $y = \cos x$) je $-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ přímka $y = -\frac{1}{2}$.



Vyznačená přímka se v intervalu $\langle 0;2\pi)$ protíná s grafem ve dvou bodech $\Rightarrow$ existují dva úhly z intervalu $\langle 0;2\pi)$, pro které platí $\cos x = -\frac{1}{2}$, pouze pro druhou hodnotu x_2 je hodnota funkce $y = \sin x$ záporná.

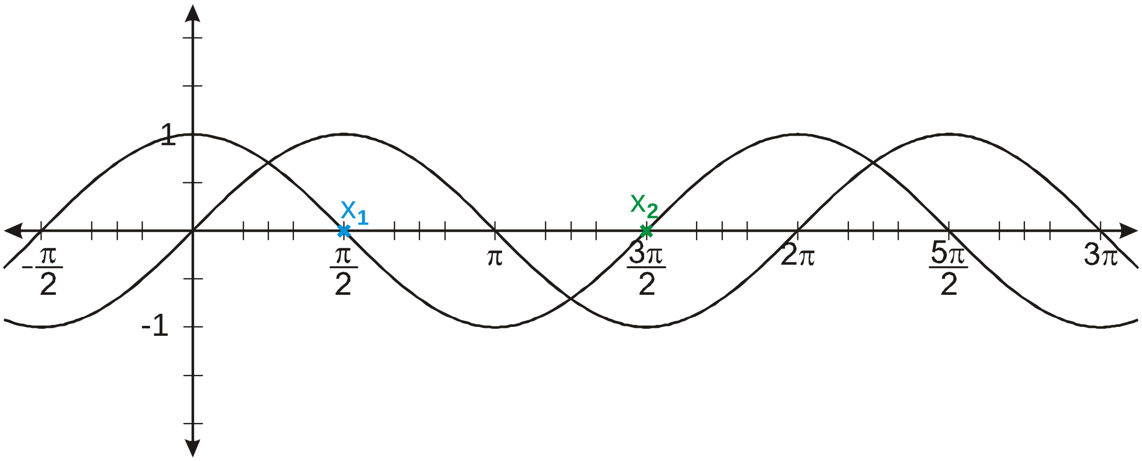
Protože $-\frac{1}{2}$ je „malá“ tabulková hodnota funkce cosinus, musí být x_1 a x_2 třetinové hodnoty.

Z obrázku je vidět, že platí $x_2 = \frac{4}{3}\pi$ (hodnota $x_1 = \frac{2}{3}\pi$ nás nezájímá).

Funkce conus je periodická s nejmenší periodou 2π $\Rightarrow$ hledaná čísla tvoří množinu

$\bigcup_{k\in Z} = \left\{ \frac{5}{3}\pi + k\cdot 2\pi \right\}$.

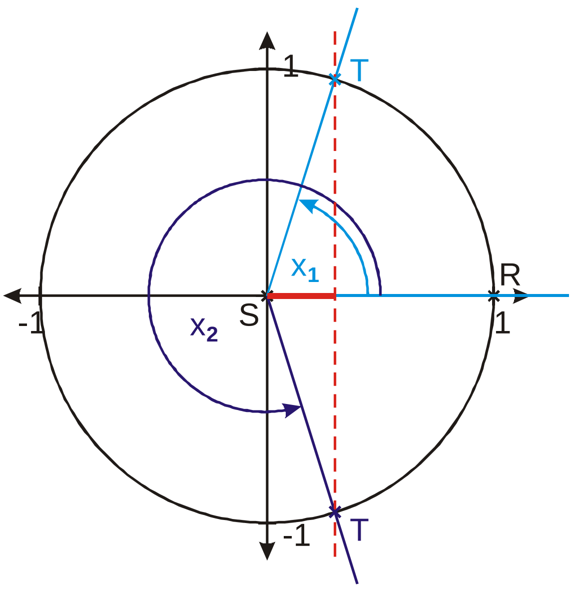
Př. 7: Najdi všechny úhly $x \in R$, pro které platí $\cos x = 0 \wedge \sin x > 0$.



Z obrázku s grafy funkcí $y = \sin x$ a $y = \cos x$ je vidět, že jediným úhlem v intervalu $\langle 0; 2\pi)$ pro který platí podmínky ze zadání je úhel $\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ hledaná čísla tvoří množinu $\bigcup_{k \in Z} = \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \right\}$.

Př. 8: Najdi všechny úhly $x \in R$, pro které platí $\cos x = 0,3$. Při řešení využij jednotkovou kružnici. Nalezené hodnoty vyjádři ve stupních s přesností na minuty.

Hodnota 0,3 nepatří mezi tabulkové hodnoty funkce $\cos x$. Použijeme tlačítko $\cos^{-1}$ na kalkulačce. Platí: $\cos^{-1}(0,3) = 72°33'$. Zakreslíme situaci do jednotkové kružnice.



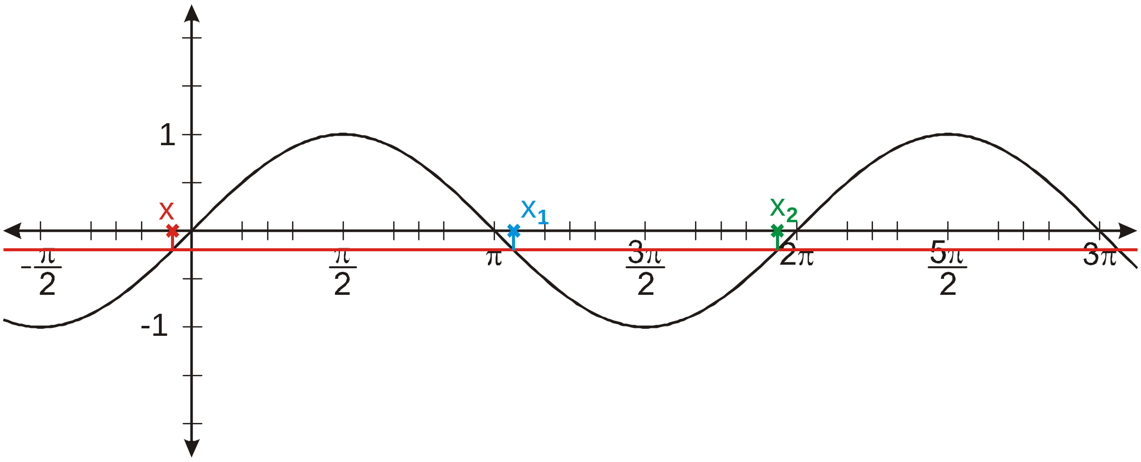
Z obrázku vidíme, že platí:

- $x_1 = 72°33'$,
- $x_2 = 360° - x_1 = 360° - 72°33' = 287°27'$.

$\Rightarrow$ Hledaná čísla tvoří množinu $\bigcup_{k \in Z} = \{72°33' + k \cdot 360°; 287°27' + k \cdot 360°\}$.

Př. 9: Najdi všechny úhly $x \in R$, pro které platí $\sin x = -0,2$. Při řešení využij graf funkce $y = \sin x$. Nalezené hodnoty vyjádři ve stupních s přesností na minuty.

Hodnota -0,2 nepatří mezi tabulkové hodnoty funkce $\sin x$. Použijeme tlačítko $\sin^{-1}$ na kalkulačce. Platí: $\sin^{-1}(-0,2) = -11°32'$ (tento úhel není základní velikostí). Zakreslíme situaci do grafu.



Z obrázku vidíme, že platí:

- $x_1 = 180° - x = 180° - (-11°32') = 191°32'$,
- $x_2 = 360° + x = 360° + (-11°32') = 348°28'$.

$\Rightarrow$ Hledaná čísla tvoří množinu $\bigcup_{k \in Z} = \{191°32' + k \cdot 360°; 348°28' + k \cdot 360°\}$.

Př. 10: Petáková:
strana 41/cvičení 10 b) c)
strana 41/cvičení 11 c)
strana 41/cvičení 12 b)
strana 41/cvičení 13 c)
strana 41/cvičení 14 c)

Shrnutí: