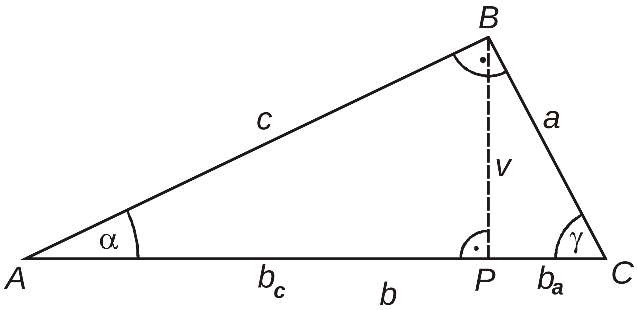
3.2.6 Pythagorova věta, Euklidovy věty II

Předpoklady: 3205

Př. 1: V pravoúhlém trojúhelníku ABC platí $\beta = 90°$. Načrtni obrázek tohoto trojúhelníku (včetně vyznačení výšky a úseků přepony) a zapiš pro tento trojúhelník Pythagorovu větu a Euklidovy věty. Zapiš vztahy pro goniometrické funkce úhlů α a γ.

Obrázek:



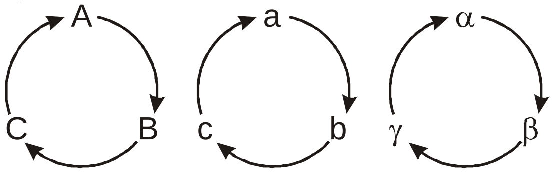
Pythagorova věta: $b^2 = a^2 + c^2$

Euklidovy věty: $v = \sqrt{b_a \cdot b_c}$, $c = \sqrt{b \cdot b_c}$, $a = \sqrt{b \cdot b_a}$

Goniometrické funkce: $\sin\alpha = \frac{a}{b}$, $\cos\alpha = \frac{c}{b}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{c}$, $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{c}{a}$

$\sin\gamma = \frac{c}{b}$, $\cos\gamma = \frac{a}{b}$, $\operatorname{tg}\gamma = \frac{c}{a}$, $\operatorname{cotg}\gamma = \frac{a}{c}$

Dodatek: Změnu označení, ke které došlo v předchozím příkladu, popisují schémata pro cyklickou záměnu:

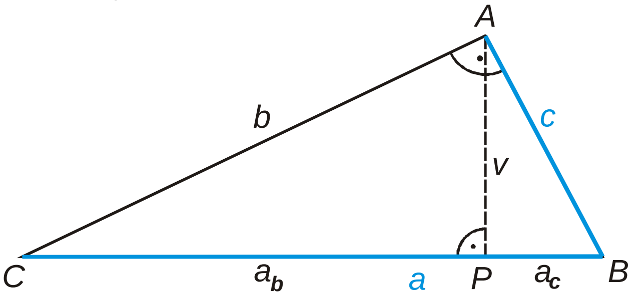


. V předchozím příkladu se z úhlu γ stal úhel β $\Rightarrow$ všechna označení stran, vrcholů i úhlů se posunulo dvakrát ve směru šipek (například $a \to c$ nebo $\alpha \to \gamma$). Schémata umožňují provést záměnu zcela mechanicky, bezpečnější je však rozhodně nakreslení obrázku a vnímaní vztahů jako vztahů mezi stranami trojúhelníka a ne mezi písmeny.

Pedagogická poznámka: Původně jsem začínal rovnou následujícím příkladem. Bohužel se ukázalo, že záměna značení není pro studenty vůbec snadnou záležitostí (setkávají se s ní zřejmě poprvé) a je nutné se nejdříve zabývat pouze jí.
Při diskusi nad příkladem je třeba trvat na tom, že všechny vzorce jsou vztahy mezi stranami trojúhelníka, nejde o vztahy mezi písmeny a tudíž je skoro jedno, jaká písmena si v konkrétním případě vybereme.

Př. 2: Vypočítej zbývající prvky (b, a_b, a_c, v, β, γ) v pravoúhlém trojúhelníku ABC $(\alpha = 90°)$, je-li dáno: $c = \sqrt{6}\,\text{cm}$, $a = 3$.

Pozor: nestandardní značení vrcholů $\Rightarrow$ nakreslíme obrázek pro jednodušší zapsání zaměněných vzorců:



Spočteme úsek přepony:

$c^2 = a \cdot a_c \Rightarrow a_c = \frac{c^2}{a} = \frac{\left(\sqrt{6}\right)^2}{3} = 2$

$a = a_c + a_b \Rightarrow a_b = a - a_c = 3 - 2 = 1$

$b = \sqrt{a \cdot a_b} = \sqrt{3 \cdot 1} = \sqrt{3}$

$v = \sqrt{a_c \cdot a_b} = \sqrt{2 \cdot 1} = \sqrt{2}$

$\sin\gamma = \frac{c}{a} \Rightarrow \gamma = 54°44'$

$\sin\beta = \frac{b}{c} \Rightarrow \beta = \beta = 35°16'$

Př. 3: Dokaž Pythagorovu větu pomocí Euklidových vět.

Pythagorova věta $c^2 = a^2 + b^2$

dosadíme: $a^2 = c_a \cdot c$, $b^2 = c_b \cdot c$

$c^2 = c \cdot c_a + c \cdot c_b$

$c^2 = c \cdot \left(c_a + c_b\right)$

$c^2 = c \cdot c = c^2$

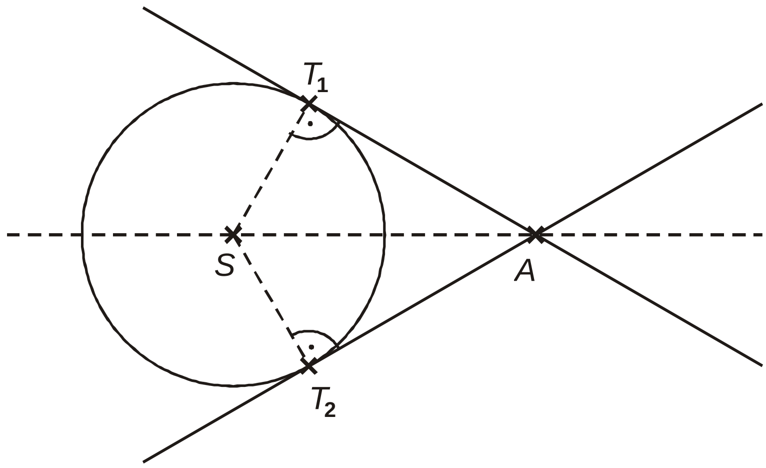
Uvedený postup můžeme i obrátit a dojít tak k Pythagorově větě $\Rightarrow$ Pythagorova věta platí.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad slouží k zabavení rychlejších studentů. Ti pomalejší ho přeskakují.

Př. 4: Je dána kružnice $k(S;2)$ a libovolný bod A, takový, že platí $|SA| = 4$. Z bodu M jsou sestrojeny tečny kružnice k a body dotyku těchto tečen T_1, T_2. Urči:

a) $|AT_1|$ b) vzdálenost středu S od úsečky T_1T_2 c) $|T_1T_2|$

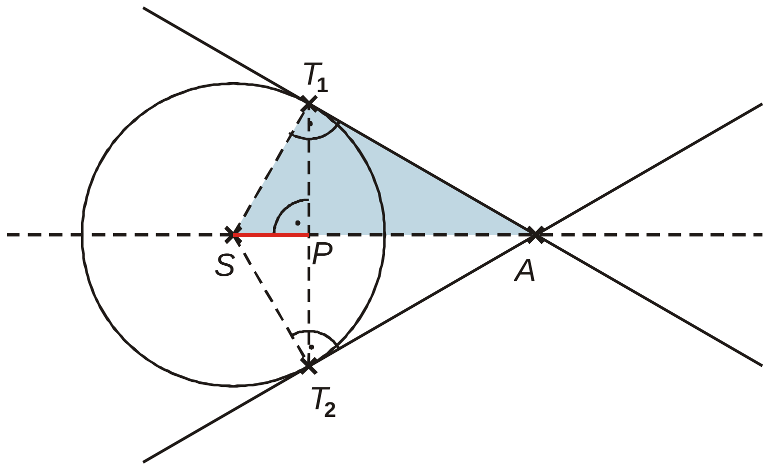
Nakreslíme si obrázek situace:



a)

Délku úsečky AT_1 určíme jako velikost odvěsny v pravoúhlém trojúhelníku SAT_1:

$|AT_1| = \sqrt{|SA|^2 - |ST_1|^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$



b) vzdálenost středu S od úsečky T_1T_2 je v obrázku nakreslena jako úsečka SP. Úsečka SP je v pravoúhlém trojúhelníku SAT_1 jedním úsekem přepony $\Rightarrow$

$a^2 = c \cdot c_a \;\Rightarrow\; |ST_1|^2 = |SA| \cdot |SP| \;\Rightarrow\; |SP| = \dfrac{|ST_1|^2}{|SA|} = \dfrac{2^2}{4} = 1$

c) $|T_1T_2|$

bod P je středem úsečky T_1T_2 $\Rightarrow$ určíme vzdálenost PT_1 a vynásobíme ji dvěma

úsečka PT_1 je výškou v pravoúhlém trojúhelníku SAT_1 $\Rightarrow$

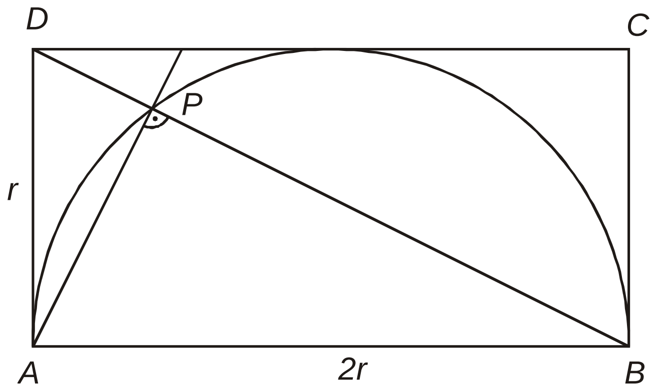
$v = \sqrt{c_a \cdot c_b} \;\Rightarrow\; |PT_1| = \sqrt{|SP| \cdot |PA|}$

Spočteme $|PA| = |SA| - |ST_1| = 4 - 1 = 3$

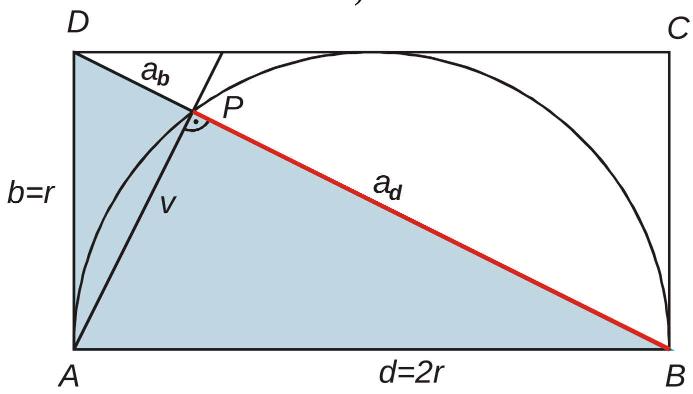
Dosadíme: $|PT_1| = \sqrt{|SP| \cdot |PA|} = \sqrt{1 \cdot 3} = \sqrt{3} \;\Rightarrow\; |T_1T_2| = 2\sqrt{3}$

Př. 5: Nad úsečkou délky $2r$ je jako nad průměrem opsaná půlkružnice. Sestroj obdélník, jehož druhý rozměr je r. Jaká část úhlopříčky obdélníka leží uvnitř kružnice?

Nakreslíme obrázek:



V obrázku jsou tři pravoúhlé trojúhelníky. Jedině u trojúhelníka *ABD* známe dvě strany (a snadno můžeme určit i třetí).



V tomto trojúhelníku potřebujeme spočítat délku úseku na přeponě. Označíme si strany a úseky přepony.

Určíme délku přepony *BD*: $|BD| = \sqrt{r^2 + (2r)^2} = \sqrt{5r^2} = r\sqrt{5}$

Použijeme větu o odvěsně (chceme vypočítat a_d):

$$d^2 = a_d \cdot a$$

$$a_d = \frac{d^2}{a} = \frac{(2r)^2}{r\sqrt{5}} = \frac{4r^2}{r\sqrt{5}} = \frac{4r}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5} r\sqrt{5}$$

Pedagogická poznámka: Značná část studentům má problém s pouhým nakreslením obrázku. Tam kontrolujeme poprvé. Vhodný trojúhelník najdou studenti docela snadno, větší problémy pak mají se správnou aplikací Euklidových vět.

Př. 6: Petáková:
strana 87/cvičení 38
strana 87/cvičení 40
strana 87/cvičení 41 b) e)

Shrnutí: Euklidovy věty i Pythagorovu větu používáme i u pravoúhlých trojúhelníků s jiným označením vrcholů. Nezáleží na písmenech ve vzorcích ale na jejich významu.