

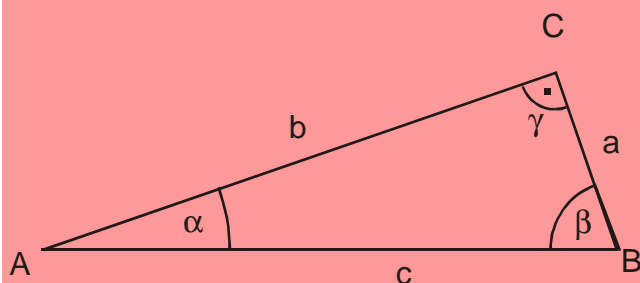
3.2.5 Pythagorova věta, Euklidovy věty I

Předpoklady: 1107, 3204

Pravoúhlý trojúhelník = trojúhelník s vnitřním úhlem 90° (s pravým vnitřním úhlem) \Rightarrow

- pravý úhel je z vnitřních úhlů největší (zbývající dva musí dát dohromady také 90°) \Rightarrow strana proti pravému úhlu je nejdelší (**přepona**), zbývající dvě jsou kratší (**odvěsny**)
- všechny pravoúhlé trojúhelníky s dalším úhlem α jsou si podobné (podle věty **uu**) \Rightarrow mají stejný tvar \Rightarrow podle poměrů jejich stran zavádíme goniometrické funkce, které z úhlu tento poměr vyprodukují

Přehled goniometrických funkcí pravoúhlého trojúhelníka:



sinus: $\sin \alpha = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{a}{c}$

cosinus: $\cos \alpha = \frac{\text{přilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{b}{c}$

tangens: $\text{tg } \alpha = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přilehlá}} = \frac{a}{b}$

kotangens: $\text{cotg } \alpha = \frac{\text{přilehlá}}{\text{protilehlá}} = \frac{b}{a}$

Pro strany pravoúhlého trojúhelníka platí:

Pythagorova věta:

V každém pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou c a odvěsnami a, b platí vztah mezi jejich velikostmi $c^2 = a^2 + b^2$

Platí i věta obrácená:

Věta obrácená k větě Pythagorově:

Pokud v trojúhelníku ABC platí pro délky stran vztah $c^2 = a^2 + b^2$, je tento trojúhelník pravoúhlý s přeponou c .

Př. 1: Urči strany a vnitřní úhly pravoúhlého trojúhelníka s úhlem $\alpha = 32^\circ$ a přeponou $c = 12$.

c je přepona $\Rightarrow \gamma = 90^\circ$

$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$

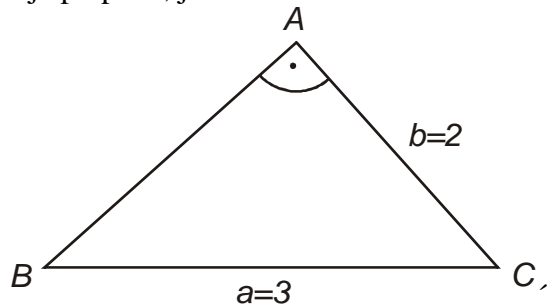
$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow a = \sin \alpha \cdot c = \sin 32^\circ \cdot 12 = 6,36$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow b = \cos \alpha \cdot c = \cos 32^\circ \cdot 12 = 10,18$$

Odvěsny trojúhelníka ABC mají velikosti $a = 6,36$ a $b = 10,18$, jeho vnitřní úhly pak $\beta = 58^\circ$ a $\gamma = 90^\circ$.

Př. 2: V pravoúhlém trojúhelníku s přeponou $a = 3$ platí $b = 2$. Urči zbývající stranu a vnitřní úhly trojúhelníka.

a je přepona, jde o nestandardní situaci \Rightarrow raději si nakreslíme obrázek



Z obrázku vidíme, že platí:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow \beta = 41^\circ 49'$$

$$\cos \gamma = \frac{b}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow \gamma = 48^\circ 11'$$

Strana c má velikost $\sqrt{5}$, vnitřní úhly $\beta = 41^\circ 49'$ a $\gamma = 48^\circ 11'$.

Př. 3: Urči, která ze trojic čísel určuje délky stran pravoúhlého trojúhelníku:

- a) 4,5,6 b) 5,12,13 c) $2, \sqrt{6}, 3$

Dosadíme do Pythagorovy věty a zjistíme zda vyjde:

a) 4,5,6

$$4^2 + 5^2 = 6^2$$

$$16 + 25 = 41 \neq 36 \Rightarrow \text{trojúhelník není pravoúhlý}$$

b) 5,12,13

$$5^2 + 12^2 = 13^2$$

$$25 + 144 = 169 \Rightarrow \text{trojúhelník je pravoúhlý}$$

c) $2, \sqrt{6}, 3$

$$2^2 + (\sqrt{6})^2 = 3^2$$

$$4 + 6 = 10 \neq 9 \Rightarrow \text{trojúhelník není pravoúhlý}$$

Př. 4: Rozhodni, zda každý trojúhelník o stranách $2n$, $n^2 + 1$, $n^2 - 1$ je pravoúhlý. Která z uvedených stran je jeho přeponou?

Za n můžeme dosazovat pouze čísla větší než 1 (aby výraz $n^2 - 1$ byl kladný) \Rightarrow číslo $n^2 + 1$ je největší a určuje tedy délku přepony.

Stejný postup jako v předchozím případě, ale dosazujeme výrazy místo konkrétních čísel:

$$(2n)^2 + (n^2 - 1)^2 = (n^2 + 1)^2$$

$$4n^2 + n^4 - 2n^2 + 1 = n^4 + 2n^2 + 1$$

$$0 = 0$$

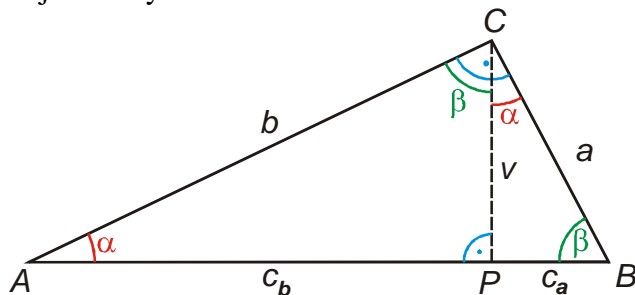
Každý trojúhelník o stranách $2n$, $n^2 + 1$, $n^2 - 1$, kde $n \geq 2$ je pravoúhlý.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklady jsou pouhým opakováním. Jejich řešení je potřeba utnout tak, aby na zbytek hodiny zbývalo minimálně 25 minut času.

Pedagogická poznámka: Podobnost trojúhelníků na následujících obrázcích jsme dokazovali v předminulé hodině. Euklidovu větu o výšce odvozují sám, zbývající dvě nechávám částečně na studentech.

V pravoúhlém trojúhelníku platí i další vztahy pro velikosti stran:

Výška v_c (dále ji budeme značit pouze v) rozdělí pravoúhlý trojúhelník ABC na dva další trojúhelníky.

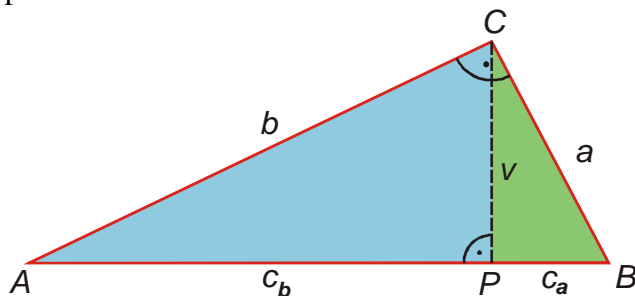


Bod P rozdělil přeponu c na dva úseky, které značíme podle přilehlé odvěsny:

- $AP = c_b$ - úsek přepony přilehlý ke straně b
- $BP = c_a$ - úsek přepony přilehlý ke straně a

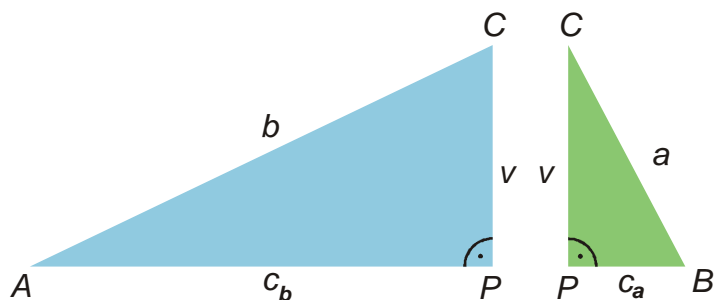
(index u úseků přepony je značen malým písmenem \Rightarrow týká se strany ne vrcholu)

Platí $\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 90^\circ - \beta \Rightarrow$ všechny tři nakreslené trojúhelníky jsou si podobné: $\triangle ABC \sim \triangle CBP \sim \triangle ACP$



Vybereme si vždy dvojici trojúhelníků a zkusíme pomocí podobnosti objevit nějaké vztahy mezi stranami.

$$\triangle CBP \sim \triangle ACP$$

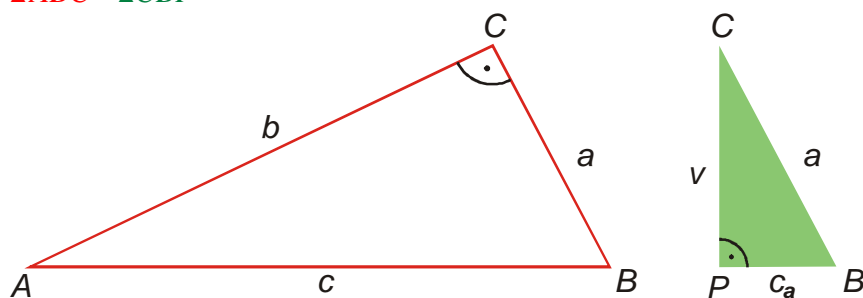


$$\frac{\text{kratší odvěsna}}{\text{delší odvěsna}} = \frac{v}{c_b} = \frac{c_a}{v}$$

$$v^2 = c_a \cdot c_b$$

$$v = \sqrt{c_a \cdot c_b} \text{ - Euklidova věta o výšce}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle CBP$$

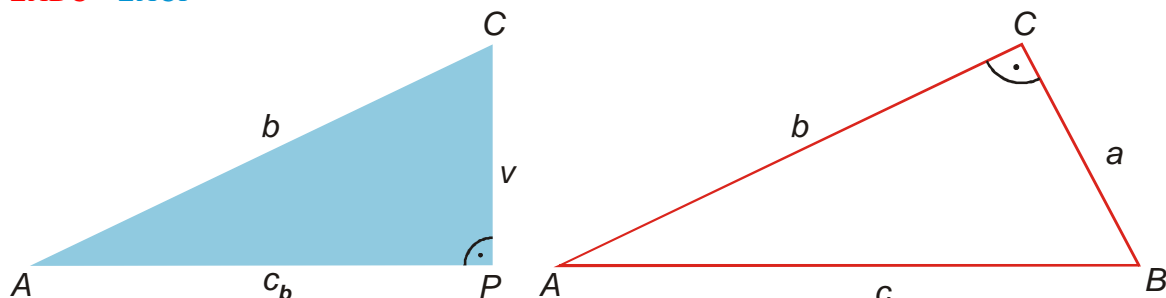


$$\frac{\text{přepona}}{\text{kratší odvěsna}} = \frac{c}{a} = \frac{a}{c_a}$$

$$a^2 = c \cdot c_a$$

$$a = \sqrt{c \cdot c_a} \text{ - Euklidova věta o odvěsně}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle ACP$$



$$\frac{\text{přepona}}{\text{delší odvěsna}} = \frac{c}{b} = \frac{b}{c_b}$$

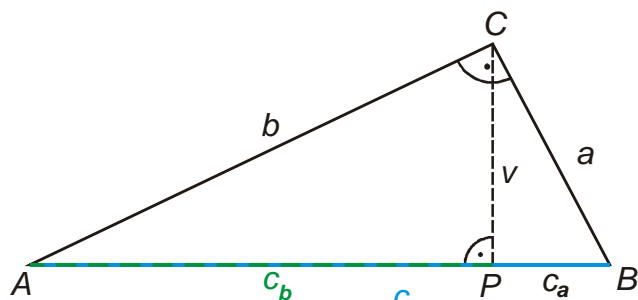
$$b^2 = c \cdot c_b$$

$$b = \sqrt{c \cdot c_b} \text{ - Euklidova věta o odvěsně}$$

V každém pravouhlém trojúhelníku s odvěsnami a , b a přeponou c platí:
 $a = \sqrt{c \cdot c_a}$, $b = \sqrt{c \cdot c_b}$, $v = \sqrt{c_a \cdot c_b}$, kde v je výška na přeponu a c_a , c_b jsou úseky přepony přilehlé ke stranám a , b .

Každou z předchozích vět je možné vyslovit i geometricky. Například věta o výšce $v = \sqrt{c_a \cdot c_b}$: **Obsah čtverce sestrojeného nad výškou pravoúhlého trojúhelníka se rovná obsahu obdélníku sestrojeného z obou úseku přepony.**

Př. 5: Vypočítej zbývající prvky ($a, b, c_b, v, \alpha, \beta$) v pravoúhlém trojúhelníku ABC ($\gamma = 90^\circ$), je-li dáno: $c = 10, c_b = 6$.



$$b = \sqrt{c \cdot c_b} = \sqrt{10 \cdot 6} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$$

$$c = c_a + c_b \Rightarrow c_a = c - c_b = 10 - 6 = 4$$

$$a = \sqrt{c \cdot c_a} = \sqrt{10 \cdot (10 - 6)} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ cm}$$

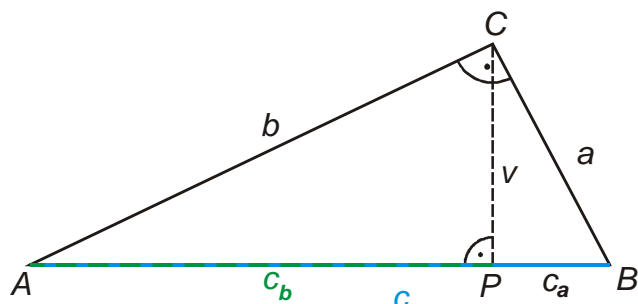
$$v = \sqrt{c_a \cdot c_b} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \text{ cm}$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{2\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \alpha = 39^\circ 14'$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{2\sqrt{15}}{10} \Rightarrow \beta = 50^\circ 46'$$

Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu doporučuji studentům, aby si nakreslili obrázek a postupně do něj dopisovali údaje, které již znají. Tímto způsobem pak snáze přijdou na to, jak spočítat údaje, které zatím neznají.

Př. 6: Najdi způsob, jak zkontrolovat správnost výsledků předchozího příkladu.



Z obrázku vidíme: $c_a < c_b, a < b, \alpha < \beta$

Součet úhlů v trojúhelníku musí být 180° .

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow 39^\circ 14' + 50^\circ 46' + 90^\circ = 180^\circ$$

$$180^\circ = 180^\circ$$

Pro velikosti stran musí platit Pythagorova věta:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 10^2 = (2\sqrt{10})^2 + (2\sqrt{15})^2$$

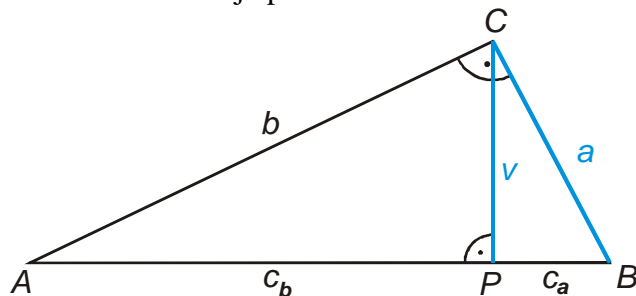
$$100 = 4 \cdot 10 + 4 \cdot 15$$

$$100 = 100 \quad \text{- platí}$$

Pedagogická poznámka: Zdůrazňuji studentům, že při kreslení obrázku je dobré zachovat podstatné rysy (pravý úhel), přehánět rozdílly (velikosti c_b a c_a) a nepřidávat další vlastnosti (hodně studentů, kreslí trojúhelníky zásadně pouze rovnoramenné). Z takto nakresleného obrázku je možné hodně vyčíst, jak je ukázáno v předchozím příkladě.

Př. 7: Vypočítej zbývající prvky ($b, c, c_a, c_b, \alpha, \beta$) v pravoúhlém trojúhelníku ABC ($\gamma = 90^\circ$), je-li dáno: $a = 3, v = \sqrt{5}$.

Zadání neumožňuje přímé dosazení do žádného ze vzorců. Nakreslíme si obrázek:



Z pravoúhlého trojúhelníku CBP můžeme pomocí Pythagorovy věty spočítat úsek přepony c_a .

$$c_a^2 = a^2 - v^2 = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 4 \Rightarrow c_a = 2$$

$$a^2 = c \cdot c_a \Rightarrow c = \frac{a^2}{c_a} = \frac{3^2}{2} = \frac{9}{2}$$

$$c = c_a + c_b \Rightarrow c_b = c - c_a = \frac{9}{2} - 2 = \frac{5}{2}$$

$$b = \sqrt{c \cdot c_b} = \sqrt{\frac{9}{2} \cdot \frac{5}{2}} = \frac{3}{2} \sqrt{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{3}{\frac{9}{2}} \Rightarrow \alpha = 41^\circ 49'$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{\frac{3}{2} \sqrt{5}}{\frac{9}{2}} \Rightarrow \beta = 48^\circ 11'$$

Př. 8: Petáková:
strana 87/cvičení 37

Shrnutí: Z podobnosti trojúhelníků, které vytvoří výška v pravoúhlém trojúhelníku, odvodíme vzorce pro výšku a odvěsny.