

3.2.1 Shodnost trojúhelníků I

Předpoklady: 3108

Dva útvary jsou shodné, pokud je možné je přemístěním ztotožnit.

⇒ v praxi těžko proveditelné ⇒ hledáme jinou možnost ověření shodnosti

Dva útvary jsou shodné, pokud se všechny odpovídající si vzdálenosti shodují.
problémy:

- musíme dát pozor, který bod patří ke kterému
- musíme zkontrolovat nekonečně mnoho dvojic vzdáleností

⇒ vznikají pravidla pro konkrétní útvary

Shodnost trojúhelníků

píšeme $ABC \cong KLM$ (bod A odpovídá bodu K , bod B odpovídá bodu L , bod C odpovídá bodu M)

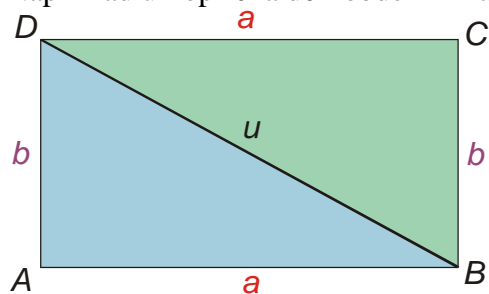
Věty o shodnosti trojúhelníků

- **Věta sss:** Dva trojúhelníky, které se shodují ve všech třech stranách, jsou shodné.
- **Věta sus:** Dva trojúhelníky, které se shodují ve dvou stranách a úhlu jimi sevřeném, jsou shodné.
- **Věta usu:** Dva trojúhelníky, které se shodují v jedné straně a úhlech přilehlých k této straně jsou shodné.

⇒ věty o shodnosti jsou zároveň i věty o jednoznačném sestrojení trojúhelníka ⇒ pokud se dva trojúhelníky dají sestroit ze stejných hodnot a postup jejich sestrojování je jednoznačný, musí být shodné ⇒ ke každému jednoznačnému postupu odpovídá jedna věta o shodnosti

Jak se pomocí předchozích vět dokazuje shodnost dvou trojúhelníků?

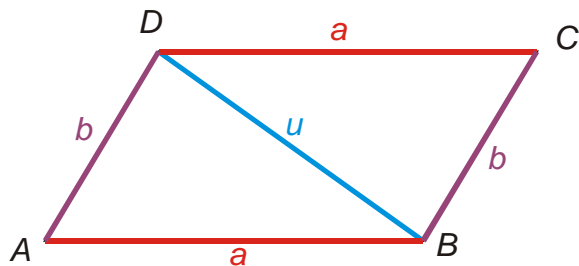
Například úhlopříčka dělí obdélník na dva stejné trojúhelníky. Proč?



Úhlopříčka rozděluje obdélník na dva trojúhelníky – označíme si je modře a zeleně. Protilehlé strany obdélníka jsou stejné ⇒ oba trojúhelníky mají jednu stranu a a jednu stranu b (označené stejnou barvou), třetí stranu trojúhelníky sdílejí (úhlopříčka u) ⇒ oba trojúhelníky mají strany a, b, u ⇒ shodují se ve všech třech stranách ⇒ jsou shodné podle věty sss.

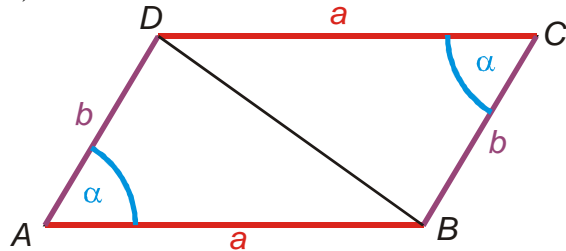
Př. 1: Dokaž pomocí každé z předchozích vět, že úhlopříčka dělí rovnoběžník na dva stejné trojúhelníky. Při důkazech využij vlastnosti rovnoběžníka: protější strany jsou shodné a rovnoběžné, protější vnitřní úhly jsou shodné.

a) věta sss



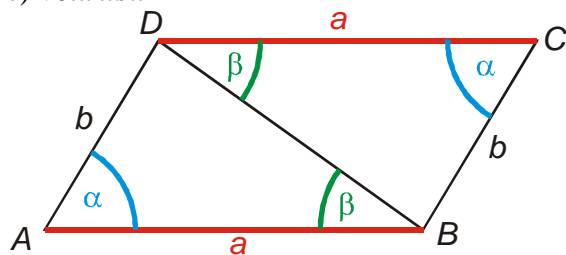
protější strany rovnoběžníka jsou shodné, oba trojúhelníky mají úhlopříčku jako společnou stranu \Rightarrow oba trojúhelníky mají strany $a, b, u \Rightarrow$ shodují se ve všech třech stranách \Rightarrow jsou shodné podle věty *sss*

b) věta *sus*



protější strany rovnoběžníka jsou shodné, protější úhly v rovnoběžníku jsou shodné \Rightarrow oba trojúhelníky mají strany a, b a úhel $\alpha \Rightarrow$ shodují se ve dvou stranách a úhlu, který tyto strany svírají \Rightarrow jsou shodné podle věty *sus*

c) věta *usu*

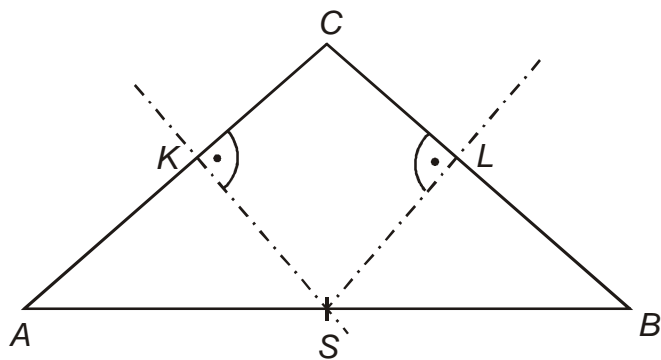


protější strany rovnoběžníka jsou shodné, protější úhly v rovnoběžníku jsou shodné, úhly, které svírá úhlopříčka s vodorovnými stranami jsou shodné (rovnoběžky protáčí příčku) \Rightarrow oba trojúhelníky mají shodnou stranu a a shodné úhly α, β , které k této straně přiléhají \Rightarrow shodují se ve straně a přilehlých úhlech \Rightarrow jsou shodné podle věty *usu*

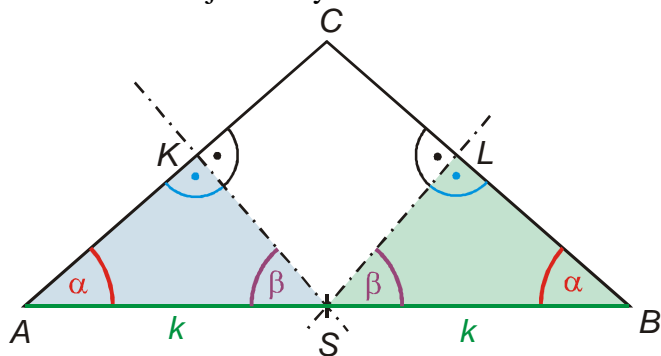
Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je samozřejmě velmi jednoduchý, ale jde o záměr. S velkou pravděpodobností jde o první příklad tohoto typu, se kterým se studenti setkají.

Př. 2: Bod S je středem základny AB rovnoramenného trojúhelníku ABC . Bodem S jsou vedeny kolmice k ramenům AC a BC . Paty těchto kolmic označíme K, L . Dokaž, že trojúhelník ASK je shodný s trojúhelníkem BSL .

Nakreslíme si náčrtek situace:



Označíme si trojúhelníky a začneme hledat shodné strany nebo shodné úhly:



Oba trojúhelníky se shodují:

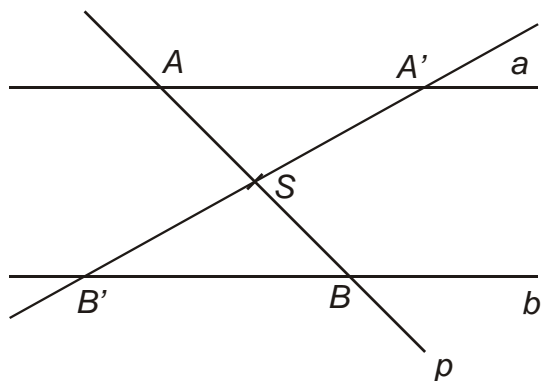
- v základně k (bod S je středem strany AB)
- v pravém úhlu při vrcholech K a L (jde o paty kolmic na ramena trojúhelníku ABC)
- v úhlech α při vrcholech A, B (trojúhelník ABC je rovnoramenný se základnou AB)
- v úhlech při vrcholu S (zbytek do 180°)

oba trojúhelníky mají shodnou stranu k a shodné úhly α, β , které k této straně přiléhají \Rightarrow shodují se ve straně a přilehlých úhlech \Rightarrow jsou shodné podle věty *usu*

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je nutné studentům nechat udělat samostatně a pečlivě je kontrolovat. Značná část z nich příklad „dokáže“ podle věty *usu*, ale se stranami AK a BL . Studenti totiž nevnímají požadavky na spolehlivost dostatečně striktně a vycházejí z rovnosti stran AK a BL bez toho, že by ji jakkoliv dokázali (nejčastěji to komentují slovy „je to přece jasné“). Je třeba trvat na tom, že shodnost stran musí být dokázána nebo přímo vycházet ze zadání (jako z něj vychází shodnost úseček AS a BS , která vyplývá ze zadané informace, že bod S je střed AB). Schopnost zjistit ze zadání o jaké informace se můžeme při řešení opírat je jednou z dovedností, které se dobře procvičují právě u geometrie.

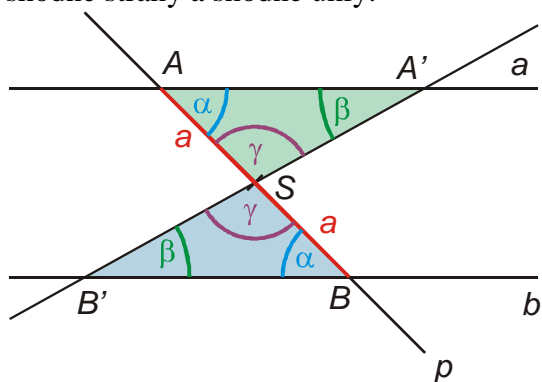
Př. 3: Jsou dány dvě rovnoběžky a, b . Přímka p je libovolná příčka těchto rovnoběžek, body A, B jsou její průsečíky s přímkami a, b a bod S je středem úsečky AB . Dokaž, že když sestrojíme pomocí libovolné přímky p' rovnoběžné s a a procházející bodem S body A' a B' , bude bod S středem úsečky $A'B'$.

Nakreslíme si náčrtek situace:



Máme dokázat shodnost dvou stran \Rightarrow zkusíme dokázat shodnost dvou trojúhelníků, které mají tyto strany \Rightarrow pokud se budou trojúhelníky shodovat musí se shodovat i jejich odpovídající strany

Pokusíme se dokázat shodnost trojúhelníků $AA'S$ a $BB'S$. Hledáme v obou trojúhelnících shodné strany a shodné úhly:



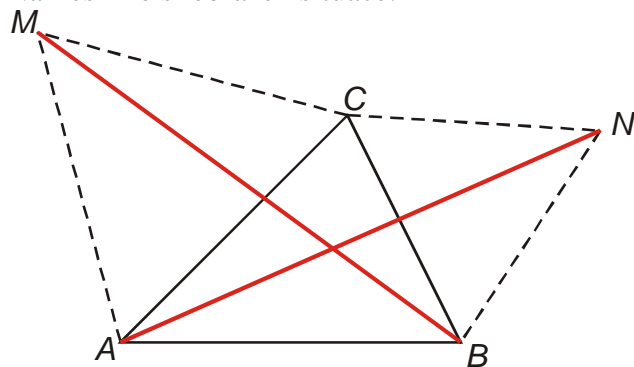
Oba trojúhelníky se shodují:

- v straně a (bod S je středem strany AB)
- v úhlu α při vrcholech A a B (rovnoběžky protávé příčkou)
- v úhlech β při vrcholech A' , B' (rovnoběžky protávé příčkou)
- v úhlech γ při vrcholu S (zbytek do 180°)

oba trojúhelníky mají shodnou stranu a a shodné úhly α , γ , které k této straně přiléhají \Rightarrow shodují se ve straně a přilehlých úhlech \Rightarrow jsou shodné podle věty *usu*

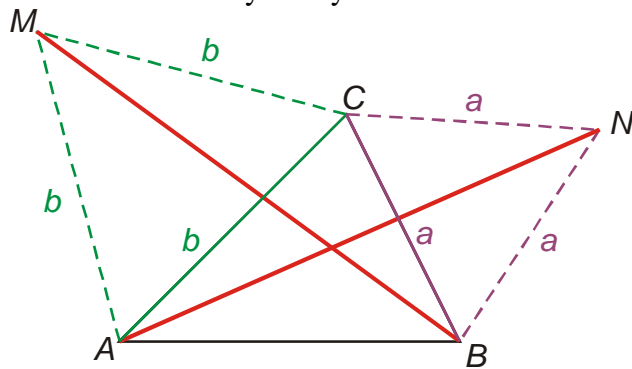
Př. 4: Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . Nad stranami BC a AC jsou sestrojeny rovnostranné trojúhelníky BCN a ACM . Dokaž, že platí $|BM| = |CN|$.

Nakreslíme si obrázek situace:

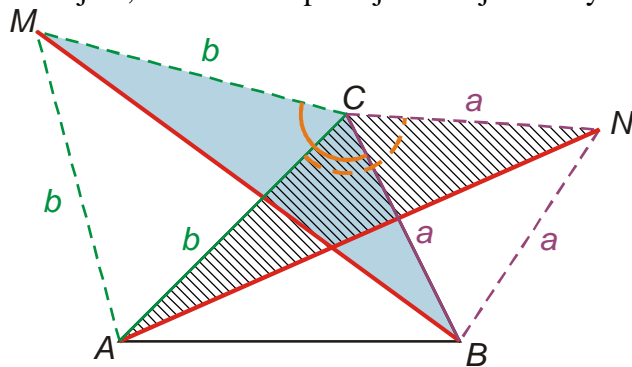


Musíme najít dva trojúhelníky, které obsahují strany BM a AN a jsou shodné.

Při důkazu budeme určitě využívat rovnostrannost trojúhelníků BCN a $ACM \Rightarrow$ vyznačíme si do obrázku všechny strany o délce a a b :



Je zřejmé, že k důkazu použijeme trojúhelníky BCM a ACN :



Oba trojúhelníky se shodují:

- v straně a (strany BC a CN)
- v straně b (strany CM a AC)
- v úhlech δ při vrchol C (platí $\delta = \gamma + 60^\circ$)

oba trojúhelníky mají dvě shodné strany a a shodný úhel stranami sevřený \Rightarrow jsou shodné podle věty *sus*

Př. 5: Petáková:
strana 86/cvičení 18
strana 86/cvičení 19

Shrnutí: Při důkazech musíme začít pouze od jistých informací.