2.9.25 Logaritmické nerovnice II

Předpoklady: 2924

Pedagogická poznámka: Většina studentů spočítá pouze první tři příklady, nejlepší se dostanou až k pátému.

Pedagogická poznámka: U následujících dvou příkladů je opět nutné s některými studenty probrat, proč v jednom příkladu při návratu ze substituce děláme sjednocení a v jiném na stejném místě hledáme průnik.

Př. 1: Vyřeš nerovnici $3\log_3^2 x - 27\log_3 x \geq \log_3 x - 9$.

Podmínky: $x > 0$.
Neznámá se vyskytuje pouze ve výrazu $\log_3 x$ $\Rightarrow$

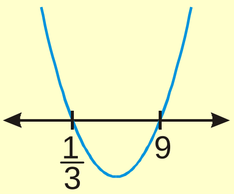
Substituce: $y = \log_3 x$

$3y^2 - 27y \geq y - 9$

$3y^2 - 28y + 9 \geq 0$ - kvadratická nerovnice $\Rightarrow$ najdeme nulové body.

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-28) \pm \sqrt{(-28)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9}}{2 \cdot 3} = \frac{28 \pm 26}{6}$$

$$y_1 = \frac{28+26}{6} = 9 \qquad y_2 = \frac{28-26}{6} = \frac{1}{3}$$



Hledáme části grafu nad osou $\Rightarrow$ $y \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right\rangle \cup \left\langle 9; \infty\right)$.

Návrat k původní proměnné: $y = \log_3 x$

Přepíšeme interval hodnot $y = \log_3 x$ pomocí nerovnic:

<table>
<tr><td colspan="2">$\log_3 x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right\rangle \cup \left\langle 9; \infty\right) \Leftrightarrow y = \log_3 x \leq \frac{1}{3}$ nebo $y = \log_3 x \geq 9$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Získali jsme dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť. Protože stačí, aby nalezená hodnota x splňovala jednu z podmínek, získáme celkové řešení jako sjednocení.</td></tr>
<tr><td>$\log_3 x \leq \frac{1}{3}$
$\log_3 x \leq \log_3 3^{\frac{1}{3}}$ odlogaritmujeme, základ je větší než 1 $\Rightarrow$ zachováváme nerovnost.
$x \leq \sqrt[3]{3}$
Nerovnosti vyhovuje interval $\left(-\infty; \sqrt[3]{3}\right\rangle$, ale musíme splňovat podmínku $x > 0$ $\Rightarrow$</td><td>$\log_3 x \geq 9$
$\log_3 x \geq \log_3 3^9$ odlogaritmujeme, základ je větší než 1 $\Rightarrow$ zachováváme nerovnost.
$x \geq 3^9$
Nerovnosti vyhovuje interval $\left\langle 3^9; \infty\right)$, který splňuje podmínku $x > 0$ $\Rightarrow$
$K_2 = \left\langle 3^9; \infty\right)$.</td></tr>
</table>

$K_1 = \left(0; \sqrt[3]{3}\right\rangle$.	

$K = K_1 \cup K_2 = \left(0; \sqrt[3]{3}\right\rangle \cup \left\langle 3^9; \infty\right)$

Př. 2: Vyřeš nerovnici $\log_{\frac{1}{2}}^2 (x-2) - 16 < 0$.

Podmínky: $x-2>0 \Rightarrow x>2$.

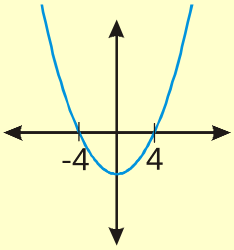
$\log_{\frac{1}{2}}^2 (x-2) - 16 < 0$

Substituce: $y = \log_{\frac{1}{2}} (x-2)$

$y^2 - 16 = 0$

$(y-4)(y+4) = 0$

Nulové body grafu: $y_1 = 4$, $y_2 = -4$.



Hledáme části grafu pod osou *x*: $y \in (-4;4)$.

Návrat k původní proměnné:

$\log_{\frac{1}{2}} (x-2) = y \in (-4;4)$

Přepíšeme interval hodnot $y = \log_{\frac{1}{2}} (x-2)$ pomocí nerovnic:

<table>
<tr><td colspan="2">$\log_{\frac{1}{2}} (x-2) \in (-4;4) \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} (x-2) > -4$ a zároveň $\log_{\frac{1}{2}} (x-2) < 4$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Získali jsme dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť, a protože musí platit obě najednou, výsledek získáme jako průnik jejich řešení.</td></tr>
<tr><td>$\log_{\frac{1}{2}} (x-2) > -4$
$\log_{\frac{1}{2}} (x-2) > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$
$\log_{\frac{1}{2}} (x-2) > \log_{\frac{1}{2}} 16$ základ logaritmu je menší než jedna $\Rightarrow$ nerovnost se při odlogaritmování obrací.
$x-2<16$
$x<18$
$K_1 = (2;18)$ - podmínka $x>2$</td><td>$\log_{\frac{1}{2}} (x-2) < 4$
$\log_{\frac{1}{2}} (x-2) < \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{4}$
$\log_{\frac{1}{2}} (x-2) < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}$ základ logaritmu je menší než jedna $\Rightarrow$ nerovnost se při odlogaritmování obrací.
$x-2 > \frac{1}{16}$
$x > \frac{1}{16} + 2 = \frac{33}{16}$</td></tr>
</table>

	$K_2 = \left(\frac{33}{16};\infty\right)$

Hledáme průnik množin $K_1 = (2;18)$ a $K_2 = \left(\frac{33}{16};\infty\right) \Rightarrow K = K_1 \cap K_2 = \left(\frac{33}{16};18\right)$.

Pedagogická poznámka: Největším problémem předchozího příkladu je samotné vyřešení kvadratické nerovnice. Protože v rovnici chybí lineární člen, většina studentů ji neřeší jako kvadratickou, ale upraví ji do tvaru $y^2 < 16$ a poté ji odmocní.

Př. 3: Vyřeš nerovnici $|\log x - 1| \le 2$.

Podmínky: $x > 0$.

Problém: Absolutní hodnota i logaritmus $\Rightarrow$ problémy si rozdělíme, nejdříve absolutní hodnota, pak logaritmus $\Rightarrow$ substituce.

Substituce: $y = \log x$.

$|y-1| \le 2$

Odstranění absolutní hodnoty dělením *R* na intervaly

Kdy číslo uvnitř absolutní hodnoty mění znaménko (a tedy i způsob, jakým k němu absolutní hodnota přistupuje) $\Rightarrow y-1=0 \Rightarrow y=1$.

$\longleftarrow\!\!+\!\!\longrightarrow$ 1 $\Rightarrow$ 2 intervaly

$y \in (-\infty;1\rangle$ $y-1 \le 0 \Rightarrow \|y-1\| = -(y-1) = -y+1$	$y \in \langle 1;\infty)$ $y-1 \ge 0 \Rightarrow \|y-1\| = y-1$
Řešíme nerovnici: $\|y-1\| \le 2$.	Řešíme rovnici: $\|y-1\| \le 2$.
$-y+1 \le 2$	$y-1 \le 2$
$-1 \le y$	$y \le 3$
Nerovnosti vyhovuje interval $\langle -1;\infty)$, ale počítáme pouze s čísly v intervalu $y \in (-\infty;1\rangle$	Nerovnosti vyhovuje interval $y \in (-\infty;3\rangle$, ale počítáme pouze s čísly v intervalu $y \in \langle 1;\infty)$
$\Rightarrow K_1 = \langle -1;1\rangle$.	$\Rightarrow K_2 = \langle 1;3\rangle$.

$$K = K_1 \cup K_2 = \langle -1;3\rangle$$

Návrat k původní proměnné:

$\log x = y \in \langle -1;3\rangle$

Přepíšeme interval hodnot $y = \log x$ pomocí nerovnic:

$\log x \in \langle -1;3\rangle \Leftrightarrow \log x \ge -1$ a zároveň $\log x \le 3$	
Získali jsme dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť, ale protože musí platit obě najednou, výsledek získáme jako průnik jejich řešení.	
$\log x \ge -1$	$\log x \le 3$
$\log x \ge \log 10^{-1}$	$\log x \le \log 10^3$
Základ logaritmu je větší než jedna $\Rightarrow$ nerovnost se při odlogaritmování zachovává.	Základ logaritmu je větší než jedna $\Rightarrow$ nerovnost se při odlogaritmování zachovává.
$x \ge 0{,}1$	$x \le 1000$
$K_1 = \langle 0{,}1;\infty)$	$K_2 = (-\infty;1000\rangle$

Hledáme průnik množin $K_1 = \langle 0{,}1;\infty)$ a $K_2 = (\infty;1000\rangle$.

$K = K_1 \cap K_2 = \langle 0{,}1;1000\rangle$

Př. 4: Vyřeš nerovnici $\log_2(x+3)\cdot\log_{0,3}(2-x) > 0$.

Podmínky: $x+3>0 \Rightarrow x>-3$, $2-x>0 \Rightarrow x<2$.

Problém: zdánlivě neřešitelný příklad:

- Mezi logaritmy je součin $\Rightarrow$ nemůžeme je spojit dohromady.
- Každý logaritmus má jiný základ.
- Uvnitř logaritmů je sčítání a tak je nemůžeme rozdělit.

Nápad: Na pravé straně je nula $\Rightarrow$ nezáleží na hodnotách jednotlivých logaritmů, pouze na jejich znaménkách (podobně jako u nerovnice v součinovém tvaru) $\Rightarrow$ zjistíme si, jak se mění znaménka logaritmů v součinu, a podle toho se rozhodneme.

$\log_2(x+3) > 0$

$\log_2(x+3) > \log_2 2^0$ odlogaritmujeme, základ je větší než 1 $\Rightarrow$ nerovnost zachováváme.

$x+3>1$

$x>-2$

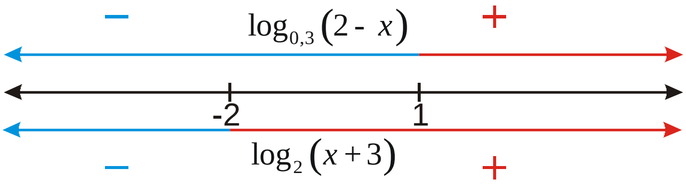
$\log_{0,3}(2-x) > 0$

$\log_{0,3}(2-x) > \log_{0,3} 0{,}3^0$ odlogaritmujeme, základ je menší než 1 $\Rightarrow$ nerovnost obracíme.

$2-x<1$

$x>1$

Nakreslíme si znaménka logaritmů nad číselnou osu:



Součin dvou čísel je kladný, pokud jsou obě čísla kladná nebo obě čísla záporná $\Rightarrow$ zdánlivě jsou kořeny $(-\infty;-2)\cup(1;\infty)$, musíme uplatnit podmínky: $x>-3$, $x<2$ $\Rightarrow$

$K = (-3;-2)\cup(1;2)$.

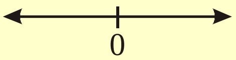
Př. 5: Vyřeš soustavu nerovnic $1 \le |\log x| \le 3$.

Podmínky: $x>0$.

Substituce: $y = \log x$.

$1 \le |y| \le 3$

Odstranění absolutní hodnoty dělením *R* na intervaly



$\Rightarrow$ 2 intervaly.

$y \in (-\infty;0\rangle$ $\quad y \le 0 \Rightarrow |y| = -y$

Řešíme soustavu nerovnic: $1 \le -y \le 3$.

$1 \le -y \Rightarrow -1 \ge y$

$-y \le 3 \Rightarrow y \ge -3$

$\Rightarrow K_1 = \langle -3;-1\rangle$

$y \in \langle 0;\infty)$ $\quad y \ge 0 \Rightarrow |y| = y$

Řešíme soustavu nerovnic: $1 \le y \le 3$.

$\Rightarrow K_2 = \langle 1;3\rangle$

$$K = K_1 \cup K_2 = \langle -3;-1\rangle \cup \langle 1;3\rangle$$

Návrat k původní proměnné (každý z intervalů spočteme zvlášť):

$\log x = y \in \langle -3; -1 \rangle$

Přepíšeme interval hodnot $y = \log x$ pomocí nerovnic:

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">$\log x \in \langle -3; -1 \rangle \Leftrightarrow \log x \geq -3$ a zároveň $\log x \leq -1$.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Získali jsme dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť, ale protože musí platit obě najednou, výsledek získáme jako průnik jejich řešení.</td></tr>
<tr><td>$\log x \geq -3$
$\log x \geq \log 10^{-3}$
Základ logaritmu je větší než jedna $\Rightarrow$ nerovnost se při odlogaritmování zachovává.
$x \geq 0,001$
$K_{11} = \langle 0,001; \infty)$</td><td>$\log x \leq -1$
$\log x \leq \log 10^{-1}$
Základ logaritmu je větší než jedna $\Rightarrow$ nerovnost se při odlogaritmování zachovává.
$x \leq 0,1$
$K_{12} = (-\infty; 0,1 \rangle$</td></tr>
</table>

Hledáme průnik množin $K_1 = \langle 0,001; \infty)$ a $K_2 = (-\infty; 0,1 \rangle$

$K_1 = K_{11} \cap K_{12} = \langle 0,001; 0,1 \rangle$

$\log x = y \in \langle 1; 3 \rangle$

Přepíšeme interval hodnot $y = \log x$ pomocí nerovnic:

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">$\log x \in \langle 1; 3 \rangle \Leftrightarrow \log x \geq 1$ a zároveň $\log x \leq 3$.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Získali jsme dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť, ale protože musí platit obě najednou, výsledek získáme jako průnik jejich řešení.</td></tr>
<tr><td>$\log x \geq 1$
$\log x \geq \log 10^{1}$
Základ logaritmu je větší než jedna $\Rightarrow$ nerovnost se při odlogaritmování zachovává.
$x \geq 10$
$K_{21} = \langle 10; \infty)$</td><td>$\log x \leq 3$
$\log x \leq \log 10^{3}$
Základ logaritmu je větší než jedna $\Rightarrow$ nerovnost se při odlogaritmování zachovává.
$x \leq 1000$
$K_{22} = (-\infty; 1000 \rangle$</td></tr>
</table>

Hledáme průnik množin $K_{21} = \langle 10; \infty)$ a $K_{22} = (-\infty; 1000 \rangle$.

$K_2 = K_{21} \cap K_{22} = \langle 10; 1000 \rangle$

Celkový výsledek získáme jako sjednocení z obou intervalů:

$K = K_1 \cup K_2 = \langle 0,001; 0,1 \rangle \cup \langle 10; 1000 \rangle$.

Př. 6: Petáková:
strana 38/cvičení 32 d)
strana 38/cvičení 33 d)
strana 38/cvičení 34 b)
strana 38/cvičení 35 c)
strana 38/cvičení 38 d)
strana 39/cvičení 40 c)

Shrnutí: