2.9.24 Logaritmické nerovnice I

Předpoklady: 2908, 2917, 2919

Pedagogická poznámka: Pokud mají studenti pracovat samostatně budou potřebovat na všechny příklady minimálně jeden a půl vyučovací hodiny. Pokud není čas, doporučuji vynechat příklady 5 a 7.
Jde o jednu z hodin, kde studenti nemohou být úspěšní, pokud se nedrží v obraze s ohledně řešení nerovnic.

Pedagogická poznámka: V hodině je možné postupovat dvěma způsoby. Můžete vynechat úvodní poznámku o očekávaných problémech a pustit studenty do rovnic. Velká většina z nich pak udělá v obou příkladech chyby.
Druhou možností je, popovídat si o poznámce a pak teprve zadat příklady. Chybujících bude podstatně méně, ale zmizí efekt překvapení.

Pedagogická poznámka: V průběhu hodiny hlavně při řešení problémů v lavicích je třeba neustále kontrolovat, zda studenti chápou, že se neučí nic nového, ale pouze opakují postupy z minula. Na začátku hodiny připomínám, že velká část úspěchu je právě v orientaci uvnitř příkladu a proto není k ničemu se případně učit příklady nazpaměť.

Na co budeme muset dávat při řešení logaritmických nerovnic pozor:

- dodržování podmínek (do logaritmů nemůže na rozdíl od exponenciálních funkcí dosazovat cokoliv),
- přechod při odlogaritmovávání (logaritmická funkce může být stejně jako funkce exponenciální rostoucí i klesající).

Př. 1: Vyřeš nerovnici $\log_2(x+1) < 2$.

Podmínka: $x+1>0 \Rightarrow x>-1$ (do logaritmu nemůžeme dosadit cokoliv).

$\log_2(x+1) < 2$

$\log_2(x+1) < \log_2 2^2$

$\log_2(x+1) < \log_2 4$ - nerovnost logaritmů, základ větší než 1 $\Rightarrow$ můžeme odlogaritmovat.

$(x+1) < 4$

$x < 3$

Zdá se, že platí $K = (-\infty;3)$, ale musíme zohlednit podmínky pro dosazování do logaritmu (všechna dosazovaná čísla musí byt větší než –1).

$K = (-1;3)$

Pedagogická poznámka: Pokud studenti potřebují na vyhodnocování podmínek číselnou osu, rozhodně jim v tom nebráním, naopak sám ji občas nabízím.

Př. 2: Vyřeš nerovnici $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) < -1$.

Podmínka: $2x-1>0 \Rightarrow x>\frac{1}{2}$ (do logaritmu nemůžeme dosadit cokoliv).

$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) < -1$

$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) < \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) < \log_{\frac{1}{2}} 2$ - nerovnost logaritmů, základ menší než 1 $\Rightarrow$ funkce $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ je klesající a menší hodnoty y vyrábí z větších hodnot x $\Rightarrow$ můžeme odlogaritmovat, ale musíme obrátit nerovnost (stejná situace jako u exponenciálních nerovnic).

$2x-1>2$

$2x>3$

$x>\frac{3}{2}$ $\qquad K=\left(\frac{3}{2};\infty\right)$

Pedagogická poznámka: Pokud vynecháte úvod hodiny, naprostá většina studentů zkazí oba první příklady. V prvním zapomene zohlednit, že logaritmus je možné určovat pouze z kladných čísel a v druhém nezohlední, že základ logaritmu je menší než 1. Myslím, že v tomto okamžiku dobré místo připomenout, jak jsou v takových situacích užitečná obecná pravidla („výsledek obsahuje pouze to, co můžeme dosadit“, „nerovnice se nemění při úpravách reprezentovaných rostoucí funkcí). Pokud úvod prodiskutujete, bude chyb méně, více pak u druhého příkladu (během řešení prvního mnozí zapomenou, že si mají na něco dávat pozor).

Při řešení logaritmických nerovnic musíme dávat pozor na:

- **dodržení podmínek pro dosazení do logaritmu,**
- **hodnotu základu, pokud je základ logaritmu menší než 1, musíme při odlogaritmování obrátit znaménko nerovnosti.**

Př. 3: Vyřeš nerovnici $\log_3(x+2) < \log_3(3-x)$.

Podmínky: $x+2>0 \Rightarrow x>-2$, $3-x>0 \Rightarrow 3>x$.

$\log_3(x+2) < \log_3(3-x)$ - nerovnost logaritmů, základ větší než 1 $\Rightarrow$ můžeme odlogaritmovat a nemusíme otáčet nerovnost.

$x+2<3-x$

$2x<1$

$x<\frac{1}{2}$, musíme splnit podmínky $x>-2$, $x<3$ $\Rightarrow$ $\qquad K=\left(-2;\frac{1}{2}\right)$.

Př. 4: Vyřeš nerovnici $\log_{0,5} x + \log_{0,5}(x+3) \geq 2\log_{0,5} 2$.

Podmínky: $x>0$, $x+3>0 \Rightarrow x>-3$.

Mezi logaritmy je sčítání, uvnitř jsou různé výrazy $\Rightarrow$ převedeme na tvar
$\log_{0,5} výraz1 \geq \log_{0,5} výraz2$

$\log_{0,5} x + \log_{0,5}(x+3) \geq 2\log_{0,5} 2$

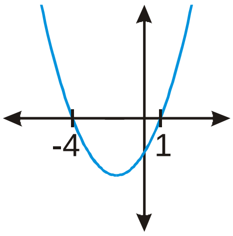
$\log_{0,5} x(x+3) \geq \log_{0,5} 2^2$

$\log_{0,5} x^2 + 3x \geq \log_{0,5} 4$ - nerovnost logaritmů, základ menší než 1 $\Rightarrow$ obracíme nerovnost.

$x^2 + 3x \leq 4$

$x^2 + 3x - 4 \leq 0$

$(x+4)(x-1) \leq 0$ $\Rightarrow$ nulové body, grafem je „ďolík“



Zdá se, že řešením je interval $\langle -4;1 \rangle$, musíme splnit podmínky $x > 0$, $x > -3$

$\Rightarrow$ $K = (0;1\rangle$

Př. 5: Vyřeš nerovnici $\log|x-3| < 2$.

Podmínky: $|x-3| > 0 \Rightarrow x \neq 3$.

$\log|x-3| < 2$

$\log|x-3| < \log 10^2$ - nerovnost logaritmů, základ větší než 1 $\Rightarrow$ zachováváme nerovnost

$|x-3| < 100$ - hledáme čísla, vzdálená od 3 o méně než 100 $\Rightarrow$ interval $(-97;103)$

Musíme splnit podmínku $x \neq 3$ $\Rightarrow$ $K = (-97;3) \cup (3;103)$.

Pedagogická poznámka: Někteří studenti si úlohy komplikují tím, že ještě před odstraňováním logaritmu odstraní absolutní hodnotu. Upozorněte je, že jsou tak v rozporu se zásadou KISS, protože odstranění absolutní hodnoty znamená dvojitý postup ve chvíli, kdy ještě není odstraněn logaritmus a nerovnice je sama o sobě dostatečně složitá.

Př. 6: Vyřeš nerovnici $\log_x 9 < 4$.

Podmínky: $x > 0$, $x \neq 1$.
Příklad je možné řešit dvěma způsoby.
a) pomocí definice logaritmu
$\log_x 9$ - číslo na které musíme umocnit x aby vyšlo 9 $\Rightarrow$ přepíšeme pravou stranu rovnice na logaritmus při základu x:

$\log_x 9 < \log_x x^4$ chceme odlogaritmovat, ale postup při odlogaritmování závisí na hodnotě základu (zda je větší nebo menší než 1) oba druhy hodnot jsou povoleny $\Rightarrow$ nemůžeme příklad vyřešit najednou, musíme rozdělit do dvou větví.

$\log_x 9 < \log_x x^4$, $0 < x < 1$	$\log_x 9 < \log_x x^4$, $x > 1$

(základ logaritmu je menší než 1 $\Rightarrow$ obracíme znaménko nerovnosti) $9 > x^4 \quad / \sqrt[4]{\ }$ ($x > 0$ kvůli podmínce v logaritmu) $\sqrt[4]{9} > x$ $x < \sqrt{3}$ Zdá se, že řešením je interval $\left(-\infty;\sqrt{3}\right)$, počítáme s čísly $x < 1$ a $x > 0 \Rightarrow K_1 = (0;1)$.	(základ logaritmu je větší než 1 $\Rightarrow$ neobracíme znaménko nerovnosti) $9 < x^4 \quad / \sqrt[4]{\ }$ ($x > 0$ kvůli podmínce v logaritmu) $\sqrt[4]{9} < x$ $x > \sqrt{3}$ Zdá se, že řešením je interval $\left(\sqrt{3};\infty\right)$, počítáme s čísly $x > 1$, taková jsou v intervalu $\left(\sqrt{3};\infty\right)$ všechna $\Rightarrow K_2 = \left(\sqrt{3};\infty\right)$.

$K = K_1 \cup K_2 = (0;1) \cup \left(\sqrt{3};\infty\right)$

b) pomocí vzorce na změnu základu

Nahradíme $\log_x 9$ podílem logaritmů: $\log_x 9 = \frac{\log_9 9}{\log_9 x} = \frac{1}{\log_9 x}$.

$\log_x 9 < 4$

$\frac{1}{\log_9 x} < 4$ potřebujeme vynásobit nerovnici číslem $\log_9 x$, které může být kladné i záporné $\Rightarrow$ nemůžeme příklad vyřešit najednou, musíme rozdělit výpočet do dvou větví.

$\log_9 x < 0 \Rightarrow x < 1$ $\frac{1}{\log_9 x} < 4 \quad / \cdot \log_9 x$ (násobíme záporným číslem $\Rightarrow$ obracíme nerovnost) $1 > 4\log_9 x$ $\frac{1}{4} > \log_9 x$ $\log_9 9^{\frac{1}{4}} > \log_9 x$ - odlogaritmujeme, základ je větší než 1 $\Rightarrow$ zachováváme nerovnost. $\sqrt[4]{9} > x$ $x < \sqrt{3}$ Zdá se, že řešením je interval $\left(-\infty;\sqrt{3}\right)$, počítáme s čísly $x < 1$ a $x > 0 \Rightarrow K_1 = (0;1)$.	$\log_9 x > 0 \Rightarrow x > 1$ $\frac{1}{\log_9 x} < 4 \quad / \cdot \log_9 x$ (násobíme kladným číslem $\Rightarrow$ zachováváme nerovnost) $1 < 4\log_9 x$ $\frac{1}{4} < \log_9 x$ $\log_9 9^{\frac{1}{4}} < \log_9 x$ - odlogaritmujeme, základ je větší než 1 $\Rightarrow$ zachováváme nerovnost. $\sqrt[4]{9} < x$ $x > \sqrt{3}$ Zdá se, že řešením je interval $\left(\sqrt{3};\infty\right)$, počítáme s čísly $x > 1$, taková jsou v intervalu $\left(\sqrt{3};\infty\right)$ všechna $\Rightarrow K_2 = \left(\sqrt{3};\infty\right)$.

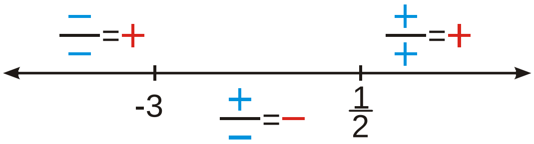
$K = K_1 \cup K_2 = (0;1) \cup \left(\sqrt{3};\infty\right)$

Pedagogická poznámka: Studenti takřka výhradně řeší předchozí nerovnici pomocí definice logaritmu. Přesto jim ukazuji i druhý postup, aby viděli, že i naprosto jinou cestou se dostaneme ke stejnému výsledku a dělení na intervaly, které se objeví odlogaritmování kvůli různým hodnotám základů, se ukáže i při jiném postupu na jiném místě z jiných důvodů, ale s naprosto stejnými důsledky.

Př. 7: Vyřeš nerovnici $\log_{0,5}\frac{x+3}{2x-1}\le 0$.

Podmínky: $\frac{x+3}{2x-1}>0 \Rightarrow$ řešíme nerovnici v podílovém tvaru.

Nulové body: $x+3=0 \Rightarrow x=-3$, $2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$.



$x\in(-\infty;-3)\cup\left(\frac{1}{2};\infty\right)$

Převedeme nerovnici na tvar $\log_{0,5} výraz1 \ge \log_{0,5} výraz2$.

$\log_{0,5}\frac{x+3}{2x-1}\le 0$

$\log_{0,5}\frac{x+3}{2x-1}\le \log_{0,5}1$ - odlogaritmujeme, základ je menší než 1 $\Rightarrow$ obracíme nerovnost.

$\frac{x+3}{2x-1}\ge 1$ potřebujeme nerovnost vynásobit výrazem $(2x-1)$, který může být kladný i záporný $\Rightarrow$ musíme rozdělit výpočet.

$x<\frac{1}{2} \Rightarrow$ násobíme záporným číslem $\Rightarrow$ obracíme nerovnost.

$x+3\le 2x-1$

$4\le x$

Zdá se, že řešením je interval $\langle 4;\infty)$, počítáme s čísly $x<\frac{1}{2} \Rightarrow K_1=\emptyset$.

$x>\frac{1}{2} \Rightarrow$ násobíme kladným číslem $\Rightarrow$ nerovnost zachováváme.

$x+3\ge 2x-1$

$4\ge x$

Zdá se, že řešením je interval $(-\infty;4\rangle$, počítáme s čísly $x>\frac{1}{2} \Rightarrow K_2=\left(\frac{1}{2};4\right\rangle$.

$K=K_1\cup K_2=\left(\frac{1}{2};4\right\rangle$

Př. 8: Petáková:
strana 38/cvičení 29 b) d) f)
strana 38/cvičení 30 c) e)
strana 38/cvičení 31 c)
strana 38/cvičení 34 a)
strana 38/cvičení 37 d) g)

Shrnutí: Při řešení logaritmických nerovnic musíme kromě hodnoty základu dávat pozor i na definiční obory výrazů, ze kterých logaritmus počítáme.