

2.9.11 Logaritmus

Jaká je hodnota $\log_2 8$?

Př. 1: Urči $\log_3 9$.

$$3^2 = 9 \Rightarrow \log_3 9 = 2.$$

Př. 2: Urči hodnoty logaritmů:

a) $\log_4 16$ b) $\log_{10} 10000$ c) $\log_2 32$ d) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$ e) $\log_{\sqrt{3}} 9$

a) $4^2 = 16 \Rightarrow \log_4 16 = 2.$ b) $10^4 = 10000 \Rightarrow \log_{10} 10000 = 4.$

c) $2^5 = 32 \Rightarrow \log_2 32 = 5.$ d) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3.$

e) $(\sqrt{3})^4 = \left[(\sqrt{3})^2\right]^2 = 3^2 = 9 \Rightarrow \log_{\sqrt{3}} 9 = 4.$

Př. 3: Urči hodnoty logaritmů:

a) $\log_2 \frac{1}{2}$ b) $\log_{10} 0,0001$ c) $\log_5 1$ d) $\log_{\frac{1}{2}} 16$ e) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{8}$

a) $\log_2 \frac{1}{2} = -1$ b) $\log_{10} 0,0001 = -4$ c) $\log_5 1 = 0$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$ e) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{8} = -6$

Př. 4: Urči hodnoty logaritmů:

a) $\log_3 \sqrt{3}$ b) $\log_4 32$ c) $\log_{27} 3^7$ d) $\log_{\sqrt{8}} 16$

a) $\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$ b) $\log_4 32 = \frac{5}{2}$ c) $\log_{27} 3^7 = \frac{7}{3}$ d) $\log_{\sqrt{8}} 16 = \frac{8}{3}$

Př. 5: Definice logaritmu ze začátku hodiny není úplná a korektní. Dopln ji tak, aby byla správná.

Logaritmus při základu a z x je číslo y (píšeme $y = \log_a x$), na které musíme umocnit základ a , abychom získali číslo x (píšeme $x = a^y$). Tedy $y = \log_a x$, právě když $x = a^y$. Tedy $y = \log_a x$ právě když $x = a^y$.

Př. 6: Urči z paměti hodnoty logaritmů:

a) $\log_2 2^{\sqrt{3}}$ b) $\log_{\sqrt{7}} 7^\pi$ c) $\log_4 2^{\sqrt{12}}$

a) $\log_2 2^{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ (2 musíme umocnit na $\sqrt{3}$, aby vyšlo $2^{\sqrt{3}}$)

b) $\log_{\sqrt{7}} 7^\pi = 2\pi$ ($\sqrt{7}$ musíme umocnit na druhou a na π , aby vyšlo 7^π)

c) $\log_4 2^{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$ (4 musíme umocnit na polovinu a na $\sqrt{12}$, aby vyšlo $2^{\sqrt{12}}$)

Př. 7: Urči hodnotu výrazu $2^{\log_2 7}$.

Platí: $2^{\log_2 7} = 7$.

Př. 8: Urči číslo x , pokud platí:

a) $\log_4 x = 2$ b) $\log_4 x = \frac{1}{2}$ c) $\log_{\sqrt{2}} x = 4$ d) $\log_{\sqrt{3}} x = \frac{1}{4}$

a) $x = 4^2 = 16$. b) Platí: $x = 4^{\frac{1}{2}} = 2$. c) Platí: $x = (\sqrt{2})^4 = 4$. d) $x = (\sqrt{3})^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$.

Př. 9: Urči číslo a , pokud platí:

a) $\log_a 16 = 4$ b) $\log_a \frac{1}{8} = -2$ c) $\log_a \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ d) $\log_a 27 = 6$

a) $\log_a 16 = 4$ $2^4 = a^4 \Rightarrow a = 2$

b) $\log_a \frac{1}{8} = -2$ $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{8} \Rightarrow a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

c) $\log_a \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\sqrt{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$

d) $\log_a 27 = 6$ $a^6 = 27 \Rightarrow a = \sqrt[6]{27} = \sqrt{3}$

Př. 10: Urči hodnotu výrazu:

a) $3^{\log_9 10}$ b) $0,5^{\log_2 7}$

a) $3^{\log_9 10} = \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_9 10} = \left(9^{\log_9 10}\right)^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$

b) $0,5^{\log_2 7} = \left(2^{-1}\right)^{\log_2 7} = \left(2^{\log_2 7}\right)^{-1} = 7^{-1} = \frac{1}{7}$

Př. 11: Zjednoduš výrazy a uveď podmínky:

a) $2^{\log_2 x^2}$ b) $\log_x x^2$

a) $2^{\log_2 x^2} = x^2$ $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

b) $\log_x x^2 = 2$ $x \in (0; \infty) - \{1\}$ (základ logaritmu nesmí být 1)

Př. 12: Petáková:

strana 31/cvičení 69 d) e) g)

strana 31/cvičení 70 c) d) g) h)

strana 31/cvičení 71 c) d) g)