2.9.1 Exponenciální funkce

Předpoklady: 2714

Funkce, které už známe:

- $y = x$, $y = x^2$, $y = x^5$, ….
- $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$, $y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$, $y = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$, …
- $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, $y = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$, … ($\sqrt{9} = 3$, protože $3^2 = 9$. Odmocnina je inverzní k mocnině a proto ověřujeme hodnoty odmocnin pomocí mocnění)
- $y = x^{\frac{7}{4}} = \sqrt[4]{x^7}$, $y = x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, …
- Dokázali bychom spočítat s libovolnou přesností i $y = x^{\sqrt{2}}$ ($\sqrt{2} \doteq 1,414...$ $\Rightarrow$ počítali bychom $y = x^{\frac{14}{10}}$, $y = x^{\frac{141}{100}}$, $y = x^{\frac{1414}{1000}}$, atd…).

Když to shrneme:

- U všech uvedených funkcí měníme číslo *x*, které umocňujeme (základ mocniny, mocněnec), číslo, na které umocňujeme (exponent, mocnitel), zůstává stejné.
- Umíme umocnit na libovolné reálné číslo.

$\Rightarrow$ Zkusíme to obrátit. Pořád stejné číslo (třeba dvojku) budeme umocňovat na různá čísla (*x*)
$\Rightarrow$ získáme funkci $y = 2^x$.

Protože dokážeme umocnit na libovolné reálné číslo bude $D\left(2^x\right) = R$.

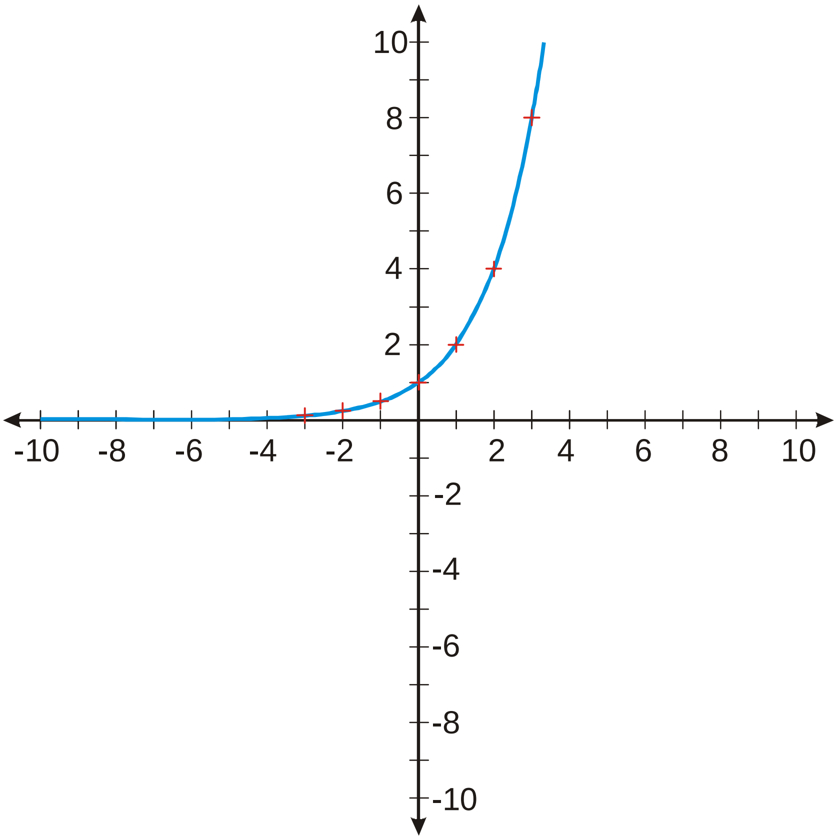
Př. 1: Doplň tabulku s hodnotami funkce $y = 2^x$.

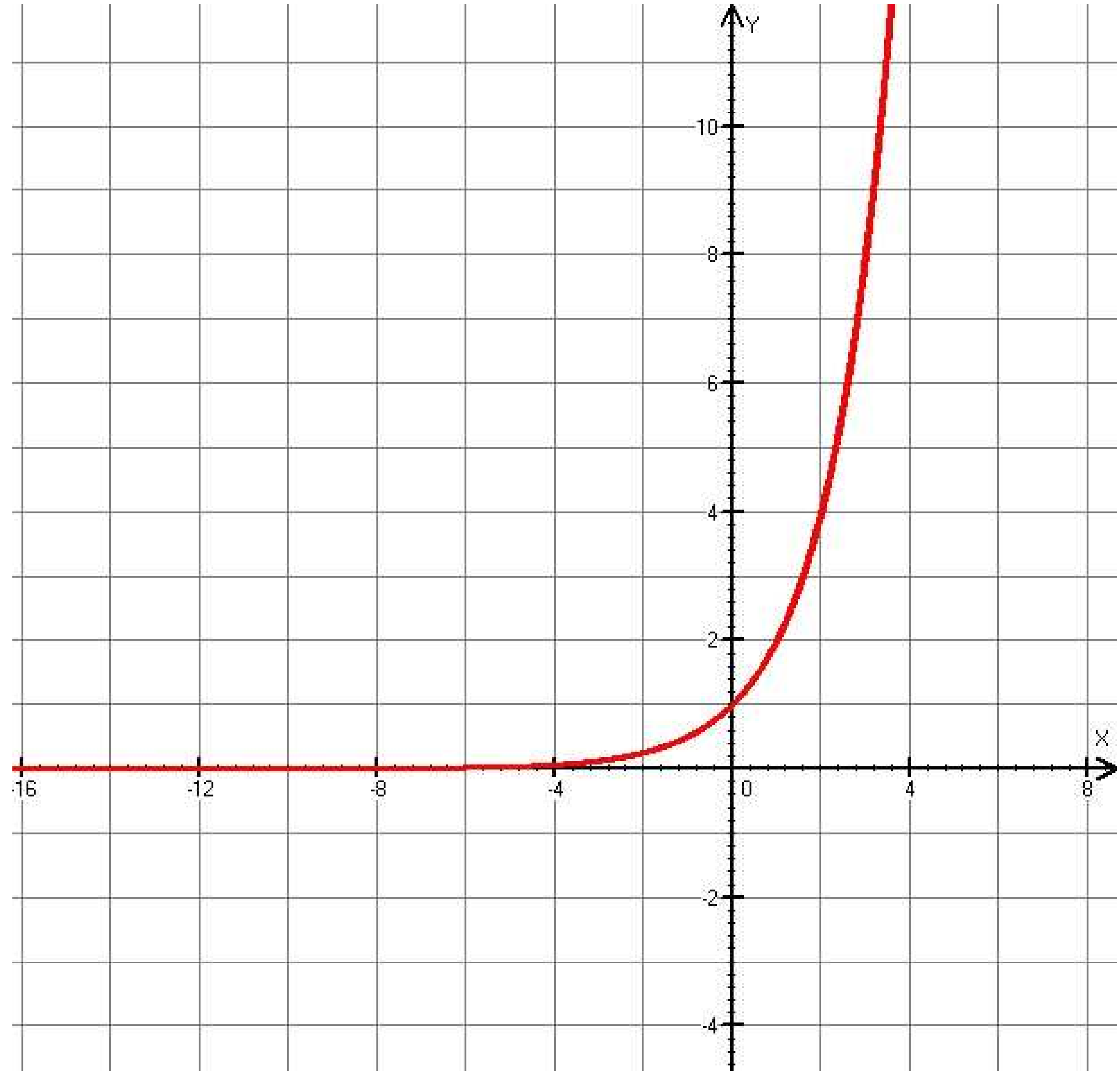
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$2^{-3} = \frac{1}{8}$	$2^{-2} = \frac{1}{4}$	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$

Pedagogická poznámka: Bohužel se skoro s jistotou objeví několik jedinců, kteří zapomněli na umocňování a budou počítat $2^{-1} = -2$, $2^{-2} = -4$,… Je potřeba je rychle odhalit a zlikvidovat.

Př. 2: Pomocí tabulky nakresli graf funkce $y = 2^x$. Svůj obrázek ověř pomocí libovolného matematického programu.





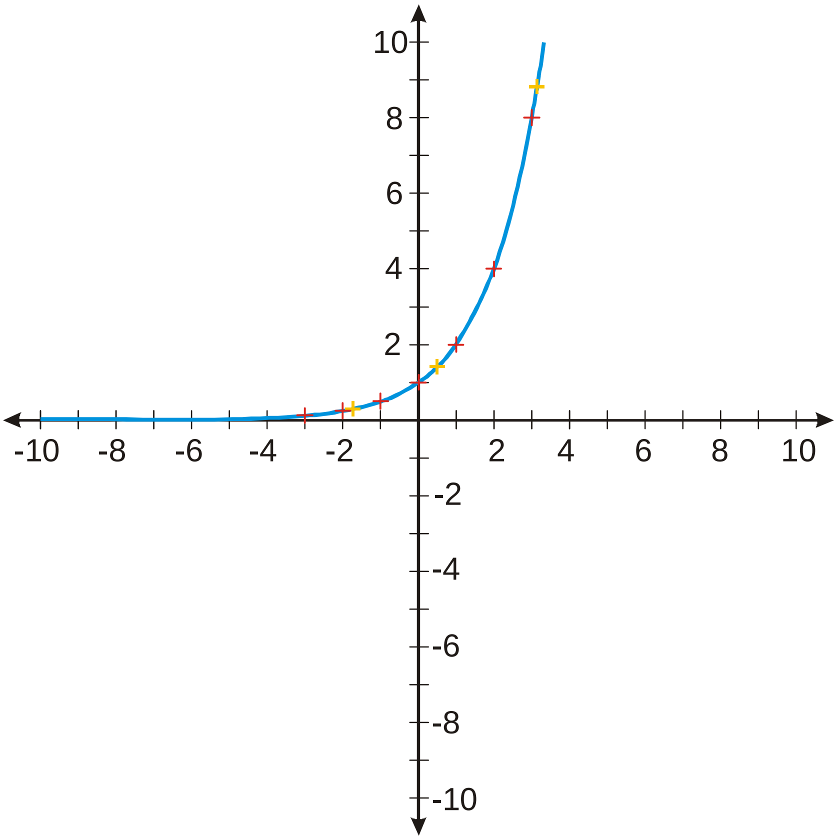
Př. 3: Doplň do tabulky hodnoty funkce $y = 2^x$ pro x uvedená v tabulce. Pro každou hodnotu x nejprve odhadni hodnotu y a poté ji urči pomocí kalkulátoru s přesnosti na tři desetinná čísla. Získané hodnoty využij k zakreslení do grafu funkce.

x	$\frac{1}{2}$	π	$-\sqrt{3}$
y			

x	$\frac{1}{2}$	π	$-\sqrt{3}$
Odhad *y*	$0<\frac{1}{2}<1$ $2^0 < 2^{\frac{1}{2}} < 2^1$ $1 < 2^{\frac{1}{2}} < 2$	$3 < \pi < 4$ $2^3 < 2^{\pi} < 2^4$ $8 < 2^{\pi} < 16$	$-2 < -\sqrt{3} < -1$ $2^{-2} < 2^{-\sqrt{3}} < 2^{-1}$ $\frac{1}{4} < 2^{-\sqrt{3}} < \frac{1}{2}$

y	$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \doteq 1,414$	$2^{\pi} \doteq 8,825$	$2^{-\sqrt{3}} \doteq 0,301$

Získané body jsou v grafu znázorněny oranžově.



Př. 4: Pomocí grafu a tabulky urči vlastnosti funkce $y = 2^x$

$D(f) = R$ (dvojku dokážeme umocnit na cokoliv)

$H(f) = (0;\infty)$ (výsledky umocňování dvojky musí být vždy kladné, protože umocňujeme kladné číslo)

Funkce je rostoucí v *R*.

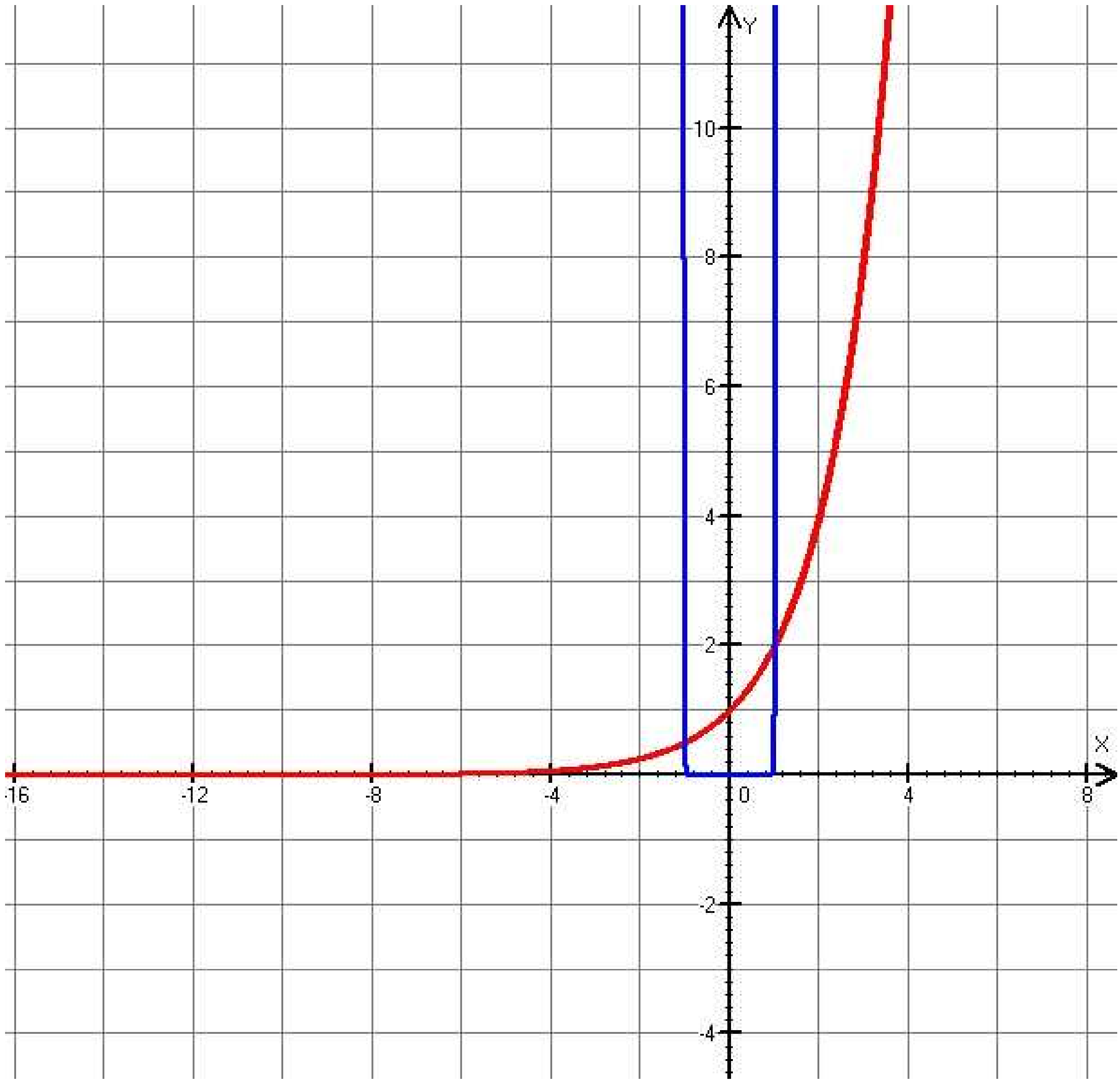
Funkce je zdola omezená, není shora omezená, nemá maximum ani minimum.

Funkce není ani lichá ani sudá.

Funkce prochází bodem $[0;1]$ (proč je to důležité, uvidíme příští hodinu).

Exponenciální funkce je nejen rostoucí, ale dokonce nejrychleji rostoucí funkcí. Zkusíme si porovnat funkce $y = x^{100}$ (ta roste hodně rychle) a $y = 2^x$ (obyčejná exponenciální funkce).

Nejdříve si nakreslíme grafy $y = x^{100}$ a $y = 2^x$:



Z grafů nevypadá, že by funkce $y = 2^x$ měla moc šancí $y = x^{100}$ předběhnout.

Zkusíme počítat hodnoty:

$x = 10$

$y = x^{100}$	10^{100}	1000000000000000000000000000000000000000000000000000 00000000000000000000000000000000000000000000000000
$y = 2^x$	2^{10}	1024

Zdá se to jasné, $y = 2^x$ nemá šanci.

$x = 100$

$y = x^{100}$	100^{100}	100000000000000000000000000000000000000000000000000 000000000000000000000000000000000000000000000000000 000000000000000000000000000000000000000000000000000 000000000000000000000000000000000000000000000000
$y = 2^x$	2^{100}	1267650600228229401496703205376

$x = 500$

$y = x^{100}$	500^{100}	7888609052210118054117285652827862296732064351090230 0477027893066406250000000000000000000000000000000000 0000000000000000000000000000000000000000000000000000 0000000000000000000000000000000000000000000000000000

		0000000000000000000000000000000000000000000000000000 0000000000
$y=2^x$	2^{500}	3273390607896141870013189696827599152216642046043064 7894832913680961337964046745548832700923259041571508 866841275600710092172565458853930533285275893 76

Že by se funkce $y=2^x$ přece jenom chytla?

$x=1000$

$y=x^{100}$	1000^{100}	1000000000000000000000000000000000000000000000000000 0000000000000000000000000000000000000000000000000000 0000000000000000000000000000000000000000000000000000 0000000000000000000000000000000000000000000000000000 0000000000000000000000000000000000000000000000000000 00000000000000000000000000000000000000000
$y=2^x$	2^{1000}	1071508607186267320948425049060001810561404811705533 6074437503883703510511249361224931983788156958581275 9467291755314682518714528569231404359845775746985748 0393456777482423098542107460506237114187795418215304 6474983581941267398767559165543946077062914571196477 686542167660429831652624386837205668069376

Hodnota funkce $y=2^x$ je už více než 10x větší!!!

$x=2000$

$y=x^{100}$	2000^{100}	1267650600228229401496703205376000000000000000000000 0000000000000000000000000000000000000000000000000000 0000000000000000000000000000000000000000000000000000 0000000000000000000000000000000000000000000000000000 0000000000000000000000000000000000000000000000000000 0000000000000000000000000000000000000000000000000000 0000000000000000000
$y=2^x$	2^{2000}	1148130695274254524232833201177681984022317702088695 2004776427368257662613923703138566594863165062699184 4596463898746277344711896086305533142593135616665318 5391299891453122800006887791482400448714289269900634 8624478161546364638836394731702604046635397090499655 8162398808944629605623311649536164221970332681344168 9089844585056023794848079140589009347765004290027167 0662583052200813223628129176126788331720659899539641 8127021779858404042159853183251540889433902091920554 9577835896720391600819572166305827553804255837260155 2834878641943205450891527578388262517543552880082284 2770817965453762184851149029376

Z funkce $y=x^{1000}$ se stává outsider.

$x=10000$

$y=x^{100}$	10000^{100}	1000000000000000000000000000000000000000000000000000 0000000000000000000000000000000000000000000000000000 0000000000000000000000000000000000000000000000000000 0000000000000000000000000000000000000000000000000000 0000000000000000000000000000000000000000000000000000 0000000000000000000000000000000000000000000000000000 0000000000000000000000000000000000000000000000000000 0000000000000000000000000000000000000

$y = 2^x$	2^{10000}	1995063116880758384883742162683585083823496831886192 4548520089498529438830221946631919961684036194597899 3311294232091242715564913494137811175937859320963239 5785573004679379452676524655126605989552055008691819 3311542508608460618104685509074866089624888090489894 8380092539416332578506215683094739025569123880652250 9664387444104675987162698545322286853816169431577562 9640762836880760732228535091641476183956381458969463 8994108409605362678210646214273333940365255656495306 0314268023496940033593431665145929777327966577560617 2582031407994198179607378245683762280037302885487251 9008344645814546505579296014148339216157345881392570 9537976911927780082695773567444412306201875783632550 2728323789270710373802866393031428133241401624195671 6905740614196543423246388012488561473052074319922596 1179625013099286024170834080760593232016126849228849 6255841312844061536738951487114256315111089745514203 3138202029316409575964647560104058458415660720449628 6701651506192063100418642227590867090057460641785695 1911456055068251250406007519842261898059237118054444 7880729063952425483392219827074044731623767608466130 3377870603980341319713349365462270056316993745550824 1780972810983291314403571877524768509857276937926433 2215993998768866608083688378380276432827751722736575 7274478411229438973381086160742325329197481312019760 4178281965697475898164531258434135959862784130128185 4062834766490886905210475808826158239619857701224070 4433058307586903931960460340497315658320867210591330 0903752823415539745394397715257455290510212310947321 6107534748257407752739863482984983407569379556466386 2187456949927901657210370136443313581721431179139822 2983845847334440270964182851005072927748364550578634 5011008529878123894739286995408343461588070439591189 8581514577917714361969872813145948378320208147498217 1858011389071228250905826817436220577475921417653715 6877256149045829049924610286300815355833081301019876 7585623434353895540917562340084488752616264356864883 3519463720377293240094456246923254350400678027273837 7553764067268986362410374914109667185570507590981002 4678988017827192595338128242195402830275940844895501 4676668389697996886241636313376393903373455801407636 7418777110553842257394991101864682196965816514851304 9422236994771476306915546821768287620036277725772378 1365331611196811280792669481887201298643660768551639 8605346022978715575179473852463694469230878942659482 1700805112032236549628816903573912136833839359175641 8733850510970271613915439590991598154654417336311656 9360311222499379699992267817323580231118626445752991 3575817500819983923628461524988108896023224436217377 1618086357015468484058622329792853875623486556440536 9626220189635710288123615675125433383032700290976686 5056855715750551672751889919412971133769014991618131 5171544007728650573189557450920330185304847113818315 4073240533190384620840364217637039115506397890007428 5367219628090347797453332046836879586858023795221862 9120080742819551317948157624448298518461509704888027

		2747215746881315947504097321150804981904558034168269 4978714131606321068639151168177430479259670937 6

Nezbývá než konstatovat, že funkce $y = x^{1000}$ je v porovnání s funkcí $y = 2^x$, co se týká rychlosti růstu, totální loser.

Pedagogická poznámka: Souboj funkcí počítáme na živo pomocí programu MuPAD.

Pedagogická poznámka: Následující příklad pojímám jako polopísemku. Jsou k dispozici dvě sady zadání (každé pro jedno oddělení). Student, kteří za 15 minut nestihnou udělat první dva příklady, mají mínus, studenti, kteří stihnou všechno, mají plus.

Př. 5: Nakresli grafy funkcí:

$y = 2^{x+1}$ $\quad$ $y = 2^{x-1}$

$y = 2^{x-2} - 1$ $\quad$ $y = 2^{x+2} + 1$

$y = 2^{1-|x|}$ $\quad$ $y = \left|2^x - 2\right|$

$y = 2 \cdot 2^{x-1}$ $\quad$ $y = \frac{2^{x+1}}{2}$

$y = 2^{x+1}$

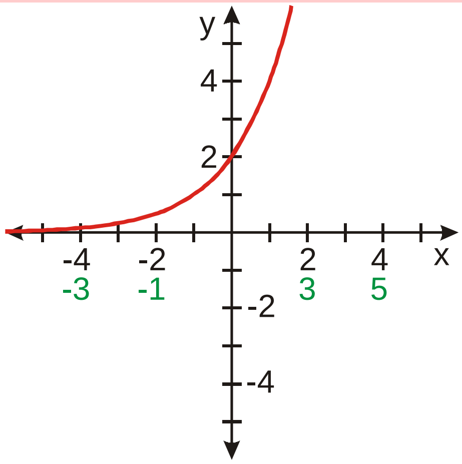
Pokud uvažujeme $y = 2^x = f(x)$, platí:

$y = 2^{x+1} = f(x+1)$.

Zvolíme x.

Vypočteme $x+1$.

Nakreslíme funkci: $y = f(x+1) = 2^{x+1}$.



$y = 2^{x-1}$

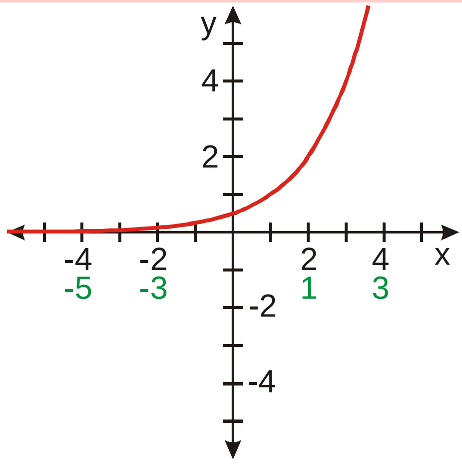
Pokud uvažujeme $y = 2^x = f(x)$, platí:

$y = y = 2^{x-1} = f(x-1)$.

Zvolíme x.

Vypočteme $x-1$.

Nakreslíme funkci: $y = f(x-1) = 2^{x-1}$.



$y = 2^{x-2} - 1$

Pokud uvažujeme $y = 2^x = f(x)$, platí:

$y = 2^{x-2} - 1 = f(x-2) - 1$.

Zvolíme x.

Vypočteme $x-2$.

Nakreslíme funkci $y = f(x-2) = 2^{x-2}$.

Nakreslíme funkci:

$y = f(x-2) - 1 = 2^{x-2} - 1$.

$y = 2^{x+2} + 1$

Pokud uvažujeme $y = 2^x = f(x)$, platí:

$y = y = 2^{x+2} + 1 = f(x+2) + 1$.

Zvolíme x.

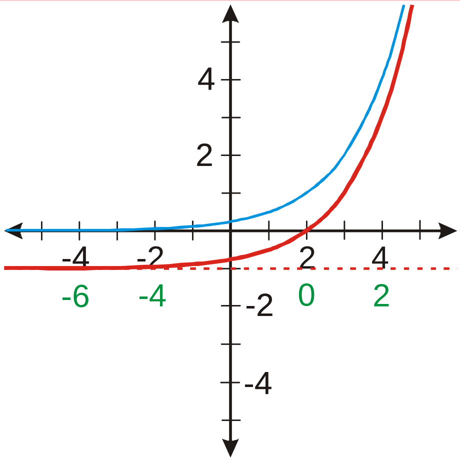
Vypočteme $x+2$.

Nakreslíme funkci $y = f(x+2) = 2^{x+2}$.

Nakreslíme funkci:

$y = f(x+2) + 1 = 2^{x+2} + 1$.

Nakreslíme funkci:
$y = f(x-2)-1 = 2^{x-2}-1$.



$$y = 2^{1-|x|}$$

Pokud uvažujeme $y = 2^x = f(x)$, platí:

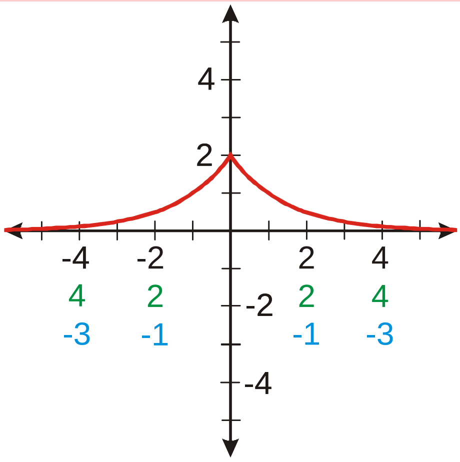
$y = 2^{1-|x|} = f(1-|x|)$.

Zvolíme x.

Vypočteme $|x|$.

Vypočteme $1-|x|$.

Nakreslíme funkci $y = f(1-|x|) = 2^{1-|x|}$.



$$y = 2 \cdot 2^{x-1}$$

Pokud uvažujeme $y = 2^x = f(x)$, platí:

$y = 2 \cdot 2^{x-1} = 2f(x-1)$.

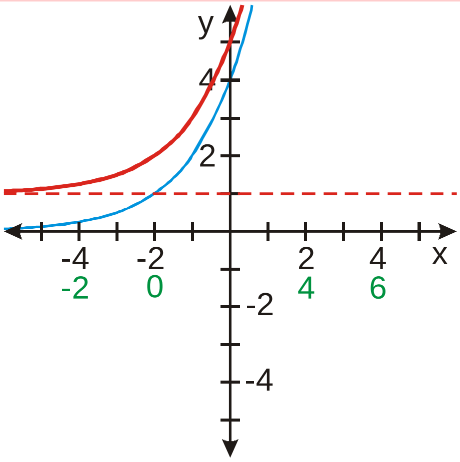
Zvolíme x.

Vypočteme $x-1$.

Nakreslíme funkci $y = f(x-1) = 2^{x-1}$.

Nakreslíme funkci $y = 2f(x-1) = 2 \cdot 2^{x-1}$.

Nakreslíme funkci:
$y = f(x+2)+1 = 2^{x+2}+1$.



$$y = \left|2^x - 2\right|$$

Pokud uvažujeme $y = 2^x = f(x)$, platí:

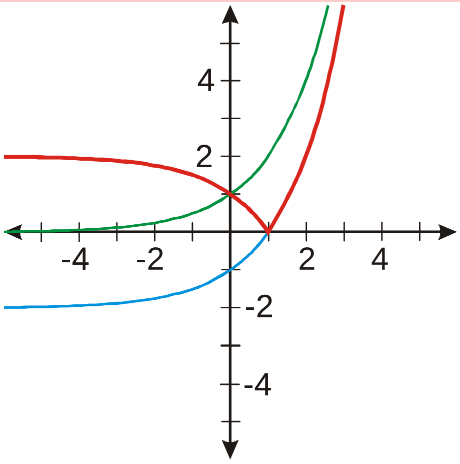
$y = \left|2^x - 2\right| = \left|f(x)-2\right|$.

Zvolíme x.

Nakreslíme funkci $y = f(x) = 2^x$.

Nakreslíme funkci $y = f(x)-2 = 2^x-2$.

Nakreslíme funkci $y = \left|f(x)-2\right| = \left|2^x-2\right|$.



$$y = \frac{2^{x+1}}{2}$$

Pokud uvažujeme $y = 2^x = f(x)$, platí:

$y = \frac{2^{x+1}}{2} = \frac{1}{2} f(x+1)$.

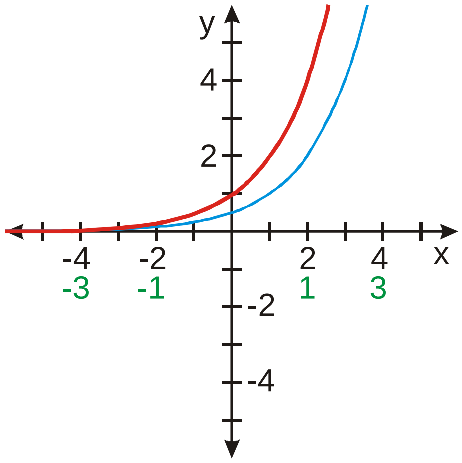
Zvolíme x.

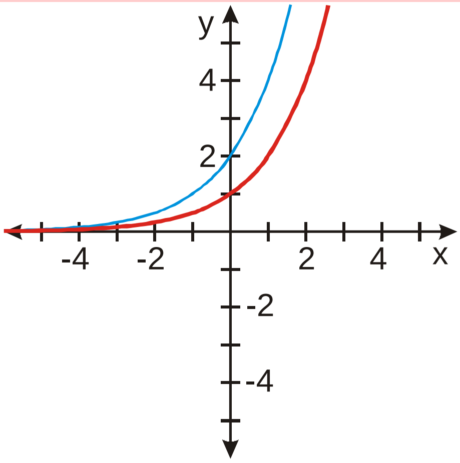
Vypočteme $x+1$.

Nakreslíme funkci $y = f(x+1) = 2^{x+1}$.

Nakreslíme funkci $y = \frac{1}{2} f(x+1) = \frac{2^{x+1}}{2}$.

Nakreslíme funkci $y=\frac{1}{2}f\left(x+1\right)=\frac{2^{x+1}}{2}$.





Př. 6: Petáková:

strana 30/cvičení 66 f_3, f_4, f_6

strana 30/cvičení 67 g_1, g_2

Shrnutí: Funkce s neznámou v exponentu se nazývá exponenciální a je nejrychleji rostoucí funkcí.