

## 2.8.9 Parametrické rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou

**Předpoklady:** 2410, 2411, 2806

**Pedagogická poznámka:** Opět si napíšeme na začátku hodiny na tabuli jednotlivé kroky postupu při řešení rovnic (nerovnic) s absolutní hodnotou a při řešení příkladů v případě, že se studenti ztratí na tento postup odkazují.

Postup řešení rovnic (nerovnic) s absolutní hodnotou:

- zbavíme se absolutní hodnoty podle znaménka výrazu uvnitř a tím rozdělíme výpočet na dvě cesty
- spočteme rovnice (nerovnice) v každé z cest
- zkontrolujeme zda výsledek patří mezi čísla, se kterými jsme v dané cestě počítali
- výsledky, které prošly kontrolou v předchozím kroku, dáme dohromady

**Př. 1:** Vyřeš rovnici  $|x-3|=c-1$  s neznámou  $x$  a parametrem  $c$ .

$|x-3|=c-1$  - rovnice obsahuje absolutní hodnotu  $\Rightarrow$  musíme ji odstranit, rozdělíme na dvě cesty podle hodnot  $x$ . Záleží na znaménku výrazu  $(x-3)$ .

$$(x-3) \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$$

uvnitř absolutní hodnoty kladné číslo  $\Rightarrow$

$$|x-3|=x-3$$

$$x-3=c-1$$

$$x=c+2$$

Počítáme jen s  $x \geq 3 \Rightarrow$ , pokud je číslo

$$x=c+2 \text{ řešením musí platit } x=c+2 \geq 3$$

$$c+2 \geq 3$$

$$c \geq 1$$

Kořen  $x=c+2$  je mezi čísly, se kterými jsme počítali  $K_1 = \{c+2\}$

$$c < 1$$

Kořen  $x=c+2$  není mezi čísly, se kterými jsme počítali.  $K = \emptyset$

$$(x-3) \leq 0 \Rightarrow x \leq 3$$

uvnitř absolutní hodnoty záporné číslo  $\Rightarrow$

$$|x-3|=-x+3$$

$$3-x=c-1$$

$$x=4-c$$

Počítáme jen s  $x \leq 3 \Rightarrow$ , pokud je číslo

$$x=4-c \text{ řešením musí platit } x=4-c \leq 3$$

$$4-c \leq 3$$

$$1 \leq c$$

Kořen  $x=4-c$  je mezi čísly, se kterými jsme počítali  $K_2 = \{4-c\}$

$$c < 1$$

Kořen  $x=4-c$  není mezi čísly, se kterými jsme počítali.  $K = \emptyset$

Nedělili jsem výpočet podle různých hodnot  $c$ , ale rozdělili jsme všechna možná  $x$  na dvě části a pro každou část jsem to spočítali  $\Rightarrow$  celkový výsledek je sjednocení obou řešení

$$K = K_1 \cup K_2 = \{c+2; 4-c\}$$

Ještě zkontrolujeme hraniční hodnotu  $c$ . Pro  $c=1$  platí:

$$c+2=1+2=3$$

$$4-c=4-1=3$$

Oba kořeny se rovnají.

**Závěrečný přehled:**

**Hodnoty parametru  $c$ :**

$$c \in (1; \infty)$$

**Řešení pro  $x$ :**

$$K = \{c+2; 4-c\}$$

$$c = 1$$

$$K = \{3\}$$

$$c \in (-\infty; 1)$$

$$K = \emptyset$$

**Pedagogická poznámka:** Studenti poměrně rychle a snadno spočítají kořeny, ale je těžké je donutit k tomu, aby zkontrolovali, zda patří mezi čísla, se kterými jsme počítali. Většinou po chvíli spočítám jednu z cest a až druhou nechám na nich.

Některé příklady můžeme řešit také pomocí definice absolutní hodnoty: absolutní hodnota z rozdílu dvou čísel se rovná vzdálenosti obrazů těchto čísel na číselné ose.

**Př. 2:** Vyřeš rovnici  $|x-3|=c-1$  s neznámou  $x$  a parametrem  $c$  použitím definice absolutní hodnoty z rozdílu dvou čísel.

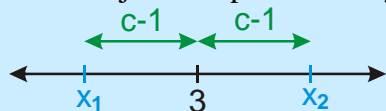
$|x-3|=c-1$  - hledáme čísla, jejichž obrazy jsou od obrazu čísla 3 na ose vzdáleny o  $c-1$ .

$\Rightarrow$  výraz  $c-1$  znamená vzdálenost  $\Rightarrow$  dělíme podle hodnot parametru  $c$ :

$c-1 < 0 \Rightarrow c < 1$  - vzdálenost je záporná - nesmysl  $\Rightarrow K = \emptyset$

$c-1 = 0 \Rightarrow c = 1$  - vzdálenost je nulová  $\Rightarrow$  jediné číslo jehož obraz má nulovou vzdálenost od obrazu čísla 3 je opět číslo 3  $\Rightarrow K = \{3\}$ .

$c-1 > 0 \Rightarrow c > 1$  - vzdálenost je větší než nula  $\Rightarrow$  budou existovat dvě taková čísla jedno nalevo a jedno napravo od trojky. Velikosti najdeme z obrázku:



$$x_1 = 3 - (c-1) = 3 - c + 1 = 4 - c$$

$$x_2 = 3 + (c-1) = 2 + c$$

$$K = \{c+2; 4-c\}$$

**Závěrečný přehled:**

Hodnoty parametru $c$ :	Řešení pro $x$ :
$c \in (1; \infty)$	$K = \{c+2; 4-c\}$
$c = 1$	$K = \{3\}$
$c \in (-\infty; 1)$	$K = \emptyset$

Stejný výsledek jako v předchozím příkladě (jinak by to ani nešlo).

**Pedagogická poznámka:** Hodně studentů má problémy s výpočtem řešení pomocí vzdálenosti  $c-1$ . Snažím se, aby si to v případě problémů vyzkoušeli na konkrétních číslech a pak postup napodobili.

**Př. 3:** Vyřeš nerovnici  $|x-p|=2$  s neznámou  $x$  a parametrem  $p$  metodou dělení definičního oboru.

$|x-p|=2$  - nerovnice obsahuje absolutní hodnotu  $\Rightarrow$  musíme ji odstranit, rozdělíme na dvě cesty podle hodnot  $x$ . Záleží na znaménku výrazu  $(x-p)$ .

$x - p < 0 \Rightarrow x < p \Rightarrow x \in (-\infty; p)$   
 uvnitř absolutní hodnoty záporné číslo  $\Rightarrow$

$$|x - p| = -x + p$$

$$|x - p| = 2$$

$$-x + p = 2$$

$$x = p - 2$$

Musíme zkontrolovat zda  $x = p - 2$  je mezi čísly, se kterými počítáme ( $x < p$ ) -

$$x = p - 2 < p \text{ - počítáme s ním } \Rightarrow$$

$$K_1 = \{p - 2\}$$

$$x - p > 0 \Rightarrow x > p$$

uvnitř absolutní hodnoty kladné číslo  $\Rightarrow$

$$|x - p| = x - p$$

$$|x - p| = 2$$

$$x - p = 2$$

$$x = p + 2$$

Musíme zkontrolovat zda  $x = p + 2$  je mezi čísly, se kterými počítáme ( $x > p$ ) -

$$x = p + 2 > p \text{ - počítáme s ním } \Rightarrow$$

$$K_2 = \{p + 2\}$$

Nedělili jsem výpočet podle různých hodnot  $p$ , ale rozdělili jsem všechna možná  $x$  na dvě části a pro každou část jsme to spočítali  $\Rightarrow$  celkový výsledek je sjednocení obou řešení.

$$K = K_1 \cup K_2 = \{p - 2; p + 2\}$$

**Závěrečný přehled:**

**Hodnoty parametru  $p$ :**

$$p \in \mathbb{R}$$

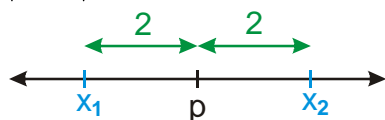
**Řešení pro  $x$ :**

$$K = \{p - 2; p + 2\}$$

**Pedagogická poznámka:** Stejně jako v minulé hodině mají někteří problém s tím, že se řešení nevětví podle parametru.

**Př. 4:** Vyřeš rovnici  $|x - p| = 2$  s neznámou  $x$  a parametrem  $p$  použitím definice absolutní hodnoty z rozdílu dvou čísel.

$|x - p| = 2$  - hledáme čísla, jejichž obrazy jsou od obrazu čísla  $p$  vzdáleny o 2.



$$x_1 = p - 2$$

$$x_2 = p + 2$$

$$K = \{p - 2; p + 2\}$$

**Závěrečný přehled:**

**Hodnoty parametru  $p$ :**

$$p \in \mathbb{R}$$

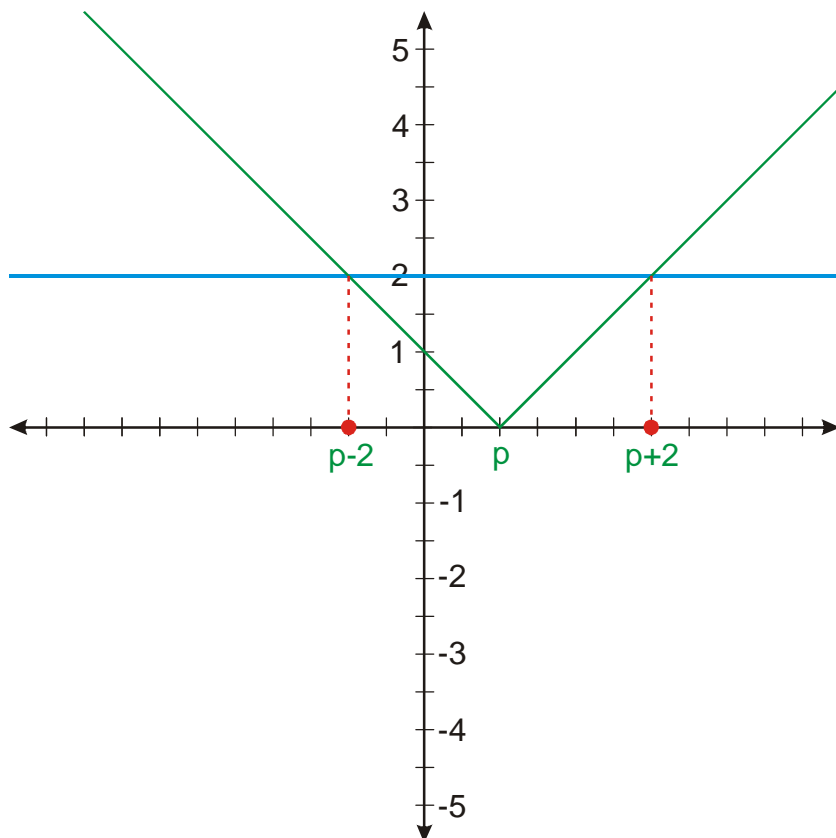
**Řešení pro  $x$ :**

$$K = \{p - 2; p + 2\}$$

**Př. 5:** Vyřeš rovnici  $|x - p| = 2$  s neznámou  $x$  a parametrem  $p$  graficky.

Levá strana – funkce  $y = |x - p| \Rightarrow$  funkce absolutní hodnota, posunutá po ose  $x$  o  $p$ .

Pravá strana – funkce  $y = 2$ .



$$K = \{p - 2; p + 2\}$$

**Závěrečný přehled:**

**Hodnoty parametru  $p$ :**

$$p \in \mathbb{R}$$

**Řešení pro  $x$ :**

$$K = \{p - 2; p + 2\}$$

**Př. 6:** Vyřeš nerovnici  $|x + c| \leq 3$  s neznámou  $x$  a parametrem  $c$ .

$|x + c| \leq 3$  - rovnice obsahuje absolutní hodnotu  $\Rightarrow$  musíme ji odstranit, rozdělíme na dvě cesty podle hodnot  $x$ . Záleží na znaménku výrazu  $(x + c)$ .

$$(x + c) \leq 0 \Rightarrow x \leq -c$$

uvnitř absolutní hodnoty záporné číslo  $\Rightarrow$

$$|x + c| = -x - c$$

$$-x - c \leq 3$$

$$-c - 3 \leq x$$

Zdá se, že  $x \in \langle -3 - c; \infty \rangle$

Počítáme jen s  $x \leq -c$

číslo  $-3 - c$  je menší než  $-c \Rightarrow$  z intervalu

něco zbylo  $K_1 = \langle -3 - c; -c \rangle$

$$(x + c) \geq 0 \Rightarrow x \geq -c$$

uvnitř absolutní hodnoty kladné číslo  $\Rightarrow$

$$|x + c| = x + c$$

$$x + c \leq 3$$

$$x \leq -c + 3$$

Zdá se, že  $x \in (-\infty; -c + 3)$

Počítáme jen s  $x \geq -c$

číslo  $-c + 3$  je větší než číslo  $-c \Rightarrow$

z intervalu něco zbylo  $K_2 = \langle -c; -c + 3 \rangle$

Nedělil jsem výpočet podle různých hodnot  $c$ , ale rozdělil jsem všechna možná  $x$  na dvě části a pro každou část jsem to spočítal  $\Rightarrow$  celkový výsledek je sjednocení obou řešení

$$K = K_1 \cup K_2 = \langle -3 - c; -c \rangle \cup \langle -c; -c + 3 \rangle = \langle -3 - c; -c + 3 \rangle$$

**Závěrečný přehled:**

**Hodnoty parametru  $c$ :**

$$c \in R$$

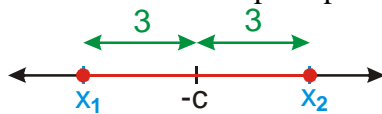
**Řešení pro  $x$ :**

$$K = \langle -3 - c; -c + 3 \rangle$$

**Př. 7:** Vyřeš rovnici  $|x+c| \leq 3$  s neznámou  $x$  a parametrem  $c$  použitím definice absolutní hodnoty z rozdílu dvou čísel.

$|x+c| = |x - (-c)| \leq 3$  - hledáme čísla, jejichž obrazy jsou od obrazu  $-c$  vzdáleny o 3 nebo méně.

parametr  $c$  představuje číslo, od kterého měříme vzdálenost, na jeho hodnotě nezáleží  $\Rightarrow$  pro všechna  $c$  můžeme postupovat stejně



$$x_1 = -c - 3$$

$$x_2 = -c + 3$$

$$K = \langle -3 - c; -c + 3 \rangle$$

**Závěrečný přehled:**

**Hodnoty parametru  $c$ :**

$$c \in R$$

**Řešení pro  $x$ :**

$$K = \langle -3 - c; -c + 3 \rangle$$

**Př. 8:** Petáková:  
strana 21/cvičení 7 b) c) d)

**Shrnutí:**