2.7.22 Použití substituce při řešení rovnic

Předpoklady: 2507,

Pedagogická poznámka: Hodina je pro značné množství studentů příliš náročná, vždy se snažím, aby všichni zkusili alespoň jednu z bikvadratických rovnic na konci. V nejhorším případě je možné jednu z rovnic vypočítat na začátku příští hodiny.

Co znamená slovo substituce?

- Například metadonová substituce pro závislé na heroinu – místo drogy berou jinou látku.
- Slavná písnička Substitute (Náhražka) od Who.
- Chemická substituce jednoho prvku v molekule druhým.

Substituce = nahrazení.

Př. 1: Vyřeš rovnici $4\left(\frac{2x-3}{3x+1}-2\right)=\frac{2x-3}{3x+1}+3$

Je to rovnice s neznámou ve jmenovateli – musíme vynásobit výrazem $(3x+1)$, abychom zlomky odstranili $\Rightarrow$ hodně počítání.

Postřeh: neznámá se vyskytuje pouze ve zlomku $\frac{2x-3}{3x+1}$, který se vyskytuje na obou stranách rovnice. Místo zlomku zavedeme novou proměnou *y*, s tou vyřešíme rovnici a pak pomocí výsledku dopočteme *x* $\Rightarrow$ **vyřešíme rovnici pomocí substituce** (ušetříme hodně počítání).

Substituce: $y=\frac{2x-3}{3x+1}$ $\Rightarrow$ Řešíme rovnici: $4(y-2)=y+3$.

$$4y-8=y+3$$
$$3y=11$$
$$y=\frac{11}{3}$$

Návrat k původní proměnné: $y=\frac{11}{3}=\frac{2x-3}{3x+1}$ $\Rightarrow$ Řešíme rovnici: $\frac{2x-3}{3x+1}=\frac{11}{3}$

Podmínka: $3x+1\neq 0 \Rightarrow x\neq -\frac{1}{3}$

$$\frac{2x-3}{3x+1}=\frac{11}{3} \quad /\cdot(3x+1)$$
$$3(2x-3)=11(3x+1)$$
$$6x-9=33x+11$$
$$-20=27x$$
$$x=-\frac{20}{27}$$
$$K=\left\{-\frac{20}{27}\right\}$$

Pedagogická poznámka: Vzhledem k tomu, že je to první příklad řešený substitucí, někteří studenti trochu tápou a ve chvíli, kdy určí hodnotu *y*, mají pocit, že příklad vyřešili. Vysvětlí se to snadno, v dalších příkladech už problémy nemají.

Př. 2: Vyřeš rovnici $\frac{2t}{t+1}+1=6\frac{t+1}{2t}$.

Postřeh: Proměnná *t* se vyskytuje pouze ve zlomcích, které jsou si podobné.

Substituce: $x=\frac{2t}{t+1}$, $\frac{t+1}{2t}=\frac{1}{\frac{t+1}{2t}}=\frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ Řešíme rovnici: $x+1=6\frac{1}{x}$.

$x+1=6\frac{1}{x} \quad /\cdot x$

$x^2+x=6$

$(x-2)(x+3)=0$

$x_1=2 \qquad x_2=-3$

Návrat k původní proměnné:

Dosadíme x_1: $x_1=2=\frac{2t}{t+1}$ $\Rightarrow$ Řešíme rovnici: $\frac{2t}{t+1}=2 \quad /\cdot(t+1)$, podmínka $t\neq-1$

$2t=2t+2$

$0=2$ - to se nerovná $\Rightarrow$ pro $x_1=2$ nemáme žádné *t*.

Dosadíme x_2: $x_2=-3=\frac{2t}{t+1}$ $\Rightarrow$ Řešíme rovnici: $\frac{2t}{t+1}=-3 \quad /\cdot(t+1)$, podmínka $t\neq-1$

$2t=-3t-3$

$5t=-3$

$t=-\frac{3}{5}$

$K=\left\{-\frac{3}{5}\right\}$

Př. 3: Vyřeš rovnici $(u+1)^2=3|u+1|+10$.

Substituce: $x=(u+1)$ by moc nepomohlo, ale číslo $(u+1)^2$ je vždy kladné stejně jako číslo $|u+1|^2$ (je jedno, jestli znaménko zmizí kvůli absolutní hodnotě nebo kvůli umocnění).

Platí tedy $(u+1)^2=|u+1|^2$, rovnici můžeme napsat $|u+1|^2=3|u+1|+10$, použijeme substituci $x=|u+1|$. $\Rightarrow$ Řešíme rovnici: $x^2=3x+10$.

$x^2-3x-10=0$

$(x-5)(x+2)=0$

$x_1=5 \qquad x_2=-2$

Návrat k původní proměnné:

Dosadíme x_1: $x_1=5=|u+1|$. $\Rightarrow$ Řešíme rovnici: $|u+1|=5$.

$|u+1| = |u-(-1)| = 5$ - hledáme čísla, jejichž obraz na číselné ose je od obrazu čísla –1 vzdálen 5 $\Rightarrow$ $u_1 = 4$, $u_2 = -6$.

Dosadíme x_2: $x_2 = -2 = |u+1|$ $\Rightarrow$ Nemá řešení, absolutní hodnota nemůže být záporná.

$K = \{-6; 4\}$

Pedagogická poznámka: Substituce předchozího příkladu napadne někoho jen výjimečně, proto není vhodné studenty příliš dlouho trápit.

Pomocí substituce můžeme řešit i rovnice, které bychom jinak nevyřešili.

Př. 4: Vyřeš rovnici $\sqrt{2(x^2+7x+10)^2-7} = x^2+7x+11$.

Když rovnici umocníme dostaneme tam i x^4 a nevyřešíme ji.

Substituce: Hodilo by se $y = x^2+7x+10$, ale na pravé straně je něco jiného $\Rightarrow$ musíme pravou stranu upravit $x^2+7x+11 = x^2+7x+10+1 = y+1$.

$\Rightarrow$ Řešíme rovnici: $\sqrt{2y^2-7} = y+1$.

$\sqrt{2y^2-7} = y+1 \quad /^2$

$\left(\sqrt{2y^2-7}\right)^2 = (y+1)^2$

$2y^2-7 = y^2+2y+1$

$y^2-2y-8 = 0$

$(y-4)(y+2) = 0$

$y_1 = 4 \qquad y_2 = -2$

Musíme udělat zkoušku:

$y_1 = 4$	$\sqrt{2y^2-7} = y+1$ $\sqrt{2\cdot 4^2-7} = 4+1$ $\sqrt{25} = 5$ $5 = 5$ - v pořádku $y_1 = 4$ je kořen rovnice $\sqrt{2y^2-7} = y+1$.
$y_2 = -2$	$\sqrt{2y^2-7} = y+1$ $\sqrt{2\cdot(-2)^2-7} = (-2)+1$ $\sqrt{1} = -1$ $1 \neq -1$ - nerovná se $y_2 = -2$ není kořen rovnice $\sqrt{2y^2-7} = y+1$.

Dále počítáme pouze s $y_1 = 4$.

Návrat k původní proměnné:

Dosadíme y_1: $y_1 = 4 = x^2+7x+10$ $\Rightarrow$ Řešíme rovnici: $x^2+7x+10 = 4$.

$x^2+7x+6 = 0$

$(x+6)(x+1) = 0$

$x_1 = -6 \qquad x_2 = -1$

$K = \{-6; -1\}$

Pedagogická poznámka: Poměrně značné procento studentů neudělá zkoušku a při návratu k původní proměnné počítá i s kořenem $y_2 = -2$. Získají tak rovnici $x^2 + 7x + 10 = -2 \Rightarrow x^2 + 7x + 12 = (x+4)(x+3)$, ze které získají dva „zdánlivé kořeny" $x_1 = -3$ a $x_2 = 4$.

Př. 5: Vyřeš rovnici $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$.

Rovnice s x^4 neumíme řešit, ale můžeme ji zapsat: $x^4 - 4x^2 + 3 = \left(x^2\right)^2 - 4x^2 + 3 = 0$, v rovnici pak vystupuje pouze x^2.

Substituce: Použijeme $y = x^2$. $\Rightarrow$ Řešíme rovnici: $y^2 - 4y + 3 = 0$ obyčejná kvadratická rovnice.

$y^2 - 4y + 3 = 0$

$(y-3)(y-1) = 0$

$y_1 = 3 \qquad\qquad y_2 = 1$

Návrat k původní proměnné:

Dosadíme y_1: $y_1 = 3 = x^2$. $\Rightarrow$ Řešíme rovnici: $x^2 = 3$.

$x^2 - 3 = 0$

$\left(x + \sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt{3}\right) = 0$

$x_1 = -\sqrt{3} \qquad\qquad x_2 = \sqrt{3}$

Dosadíme y_2: $y_1 = 1 = x^2$. $\Rightarrow$ Řešíme rovnici: $x^2 = 1$.

$x^2 - 1 = 0$

$(x+1)(x-1) = 0$

$x_3 = -1 \qquad\qquad x_4 = 1$

$K = \left\{-\sqrt{3}; -1; 1; \sqrt{3}\right\}$

Př. 6: Vyřeš rovnici $4x^4 - 5x^2 - 9 = 0$.

Rovnice s x^4 neumíme řešit, ale můžeme ji zapsat: $4x^4 - 5x^2 - 9 = 4\left(x^2\right)^2 - 5x^2 - 9 = 0$, v rovnici pak vystupuje pouze x^2.

Substituce: Použijeme $y = x^2$. $\Rightarrow$ Řešíme rovnici: $4y^2 - 5y - 9 = 0$ obyčejná kvadratická rovnice.

$4y^2 - 5y - 9 = 0$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-9)}}{2 \cdot 4} = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{8} = \frac{5 \pm 13}{8}$$

$y_1 = \frac{5+13}{8} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4} \qquad\qquad y_2 = \frac{5-13}{8} = -\frac{8}{8} = -1$

Návrat k původní proměnné:

Dosadíme y_1: $y_1 = \frac{9}{4} = x^2$. $\Rightarrow$ Řešíme rovnici: $x^2 = \frac{9}{4}$.

$x^2 - \frac{9}{4} = 0$

$\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0$

$x_1 = -\frac{3}{2}$ $\qquad$ $x_2 = \frac{3}{2}$

Dosadíme y_2: $y_1 = -1 = x^2$ $\Rightarrow$ Tady nenajdeme žádné kořeny, neexistuje číslo, které je po umocnění na druhou záporné.

$K = \left\{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right\}$

Př. 7: Petáková:
strana 128/cvičení 74 b) d) e) f)

Shrnutí: Při substituci nahradíme složitější výraz novou neznámou a tím zjednodušíme rovnici. Po vyřešení zjednodušené rovnice se musíme vrátit k původní proměnné.