2.7.20 Soustavy rovnic obsahující kvadratickou rovnici I

Př. 1: Vyřeš soustavu jedné rovnice o dvou neznámých: $x^2 + xy - 4y = 3$.

$x^2 + xy - 4y = 3$ $\quad xy - 4y = 3 - x^2$ $\quad y(x-4) = 3 - x^2 \quad / : (x-4)$ dělit můžeme pouze když $x \neq 4$

$y = \frac{3-x^2}{x-4}$ $\quad K = \left\{\left[x; \frac{3-x^2}{x-4}\right]; x \in R - \{4\}\right\}$ ještě musíme vyzkoušet, co se stane pokud $x = 4$ (to nesmíme dělit a nezískáme tak konečný vzorec)

$y(x-4) = 3 - x^2$ - dosazujeme $x = 4$

$y(4-4) = 3 - 4^2$ $\quad y \cdot 0 = -13$ - opravdu to pro $x = 4$ nemá řešení

$K = \left\{\left[x; \frac{3-x^2}{x-4}\right]; x \in R - \{4\}\right\}$

Př. 2: Vyřeš soustavu jedné rovnice o dvou neznámých: $x(y-x) = 3(y-3)$.

Velmi podobné předchozímu příkladu $\Rightarrow$ zvolíme stejný postup (vyjádření *y*)

$x(y-x) = 3(y-3)$ $\quad xy - x^2 = 3y - 9$ $\quad xy - 3y = x^2 - 9$

$y(x-3) = x^2 - 9 \quad / \cdot (x-3)$ dělit můžeme pouze když $x \neq 3$

$y = \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x + 3$

$K = \{[x; x+3]; x \in R - \{3\}\}$ ještě musíme vyzkoušet, co se stane pokud $x = 3$ (to nesmíme dělit a nezískáme tak konečný vzorec)

$y(x-3) = x^2 - 9$ - dosazujeme $x = 3$ $\quad y(3-3) = 3^2 - 9$ $\quad y \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow$ rovnice vyjde bez ohledu na hodnotu $y \Rightarrow$ musíme do řešení dodat další dvojice $\{[3; y]; y \in R\}$

$K = \{[x; x+3]; x \in R - \{3\}\} \cup \{[3; y]; y \in R\}$

Př. 3: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{array}{c} x^2 - y^2 = 9 \\ 2x - y = 6 \end{array}$.

Dvě rovnice – spousta metod. Sčítací ne (není co odečíst) $\Rightarrow$ dosazovací.
Ze které rovnice budeme dosazovat?
Z druhé, není tam druhá mocnina (ta sebou přináší vzorec pro kvadratickou rovnici).

$2x - y = 6 \Rightarrow y = 2x - 6$

Dosadím do první rovnice:

$x^2 - (2x-6)^2 = 9$ $\quad x^2 - (4x^2 - 24x + 36) = 9$ $\quad x^2 - 4x^2 + 24x - 36 = 9$

$0 = 3x^2 - 24x + 45 \quad / : 3$ $\quad x^2 - 8x + 15 = 0$ $\quad (x-5)(x-3) = 0$

$x_1 = 5 \Rightarrow y_1 = 2x_1 - 6 = 2 \cdot 5 - 6 = 4$ $\quad x_2 = 3 \Rightarrow y_2 = 2x_2 - 6 = 2 \cdot 3 - 6 = 0$

$K = \{[5; 4]; [3; 0]\}$ - musíme do dvojic psát čísla, která patří k sobě.

Př. 4: Najdi dvě čísla taková, aby se jejich součin rovnal 1 a jejich součet:
a) 9 b) 2 c) 1.

a) součet 9 $xy=1$ - součin se rovná 1 $x+y=9$ - součet se rovná 9

Dosazovací metoda: $x+y=9 \Rightarrow y=9-x$

$x(9-x)=1$ $9x-x^2=1$ $x^2-9x+1=0$ - kvadratická rovnice

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\frac{9\pm\sqrt{77}}{2}$$

$$x_1=\frac{9-\sqrt{77}}{2}\Rightarrow y_1=9-x_1=9-\frac{9-\sqrt{77}}{2}=\frac{18-\left(9-\sqrt{77}\right)}{2}=\frac{9+\sqrt{77}}{2}$$

$$x_2=\frac{9+\sqrt{77}}{2}\Rightarrow y_2=9-x_2=9-\frac{9+\sqrt{77}}{2}=\frac{18-\left(9+\sqrt{77}\right)}{2}=\frac{9-\sqrt{77}}{2}$$

$$K=\left\{\left[\frac{9-\sqrt{77}}{2};\frac{9+\sqrt{77}}{2}\right];\left[\frac{9+\sqrt{77}}{2};\frac{9-\sqrt{77}}{2}\right]\right\}$$

b) součet 2

$xy=1$ - součin se rovná 1 $x+y=2$ - součet se rovná 2

Dosazovací metoda: $xy=1\Rightarrow y=\frac{1}{x}$

$x+\frac{1}{x}=2$ $/\cdot x$ $x^2+1=2x$ $x^2-2x+1=(x-1)^2=0$ - kvadratická rovnice

$x_1=x_2=x=1\Rightarrow y=\frac{1}{x}=\frac{1}{1}=1$ $K=\{[1;1]\}$

c) součet 1

$xy=1$ - součin se rovná 1 $x+y=1$ - součet se rovná 1

Dosazovací metoda: $x+y=1\Rightarrow y=1-x$

$x(1-x)=1$ $x-x^2=1$ $x^2-x+1=0$ - kvadratická rovnice

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-)\pm\sqrt{(-)^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$$ - rovnice nemá řešení

Když nejde nalézt vyhovující *x* nemá cenu hledat *y*, protože výsledek může být pouze dvojice čísel, kterou už jasně nenajdeme.

$K=\emptyset$

Př. 5: Petáková:
strana 17/cvičení 33 b) c) f)