2.7.17 Nerovnice s neznámou pod odmocninou

Př. 1: Vyřeš nerovnici $2\sqrt{2x+3} > 7$.

a) podmínky pro odmocniny

$2x+3 \geq 0 \quad x \geq -\frac{3}{2} \Rightarrow x \in \left\langle -\frac{3}{2};\infty \right)$.

b) znaménka

Levá strana: dvojnásobek odmocniny $\Rightarrow$ vždy nezáporná $L = +$

Pravá strana: $P = 7$ - kladné číslo $P = +$

c) řešení

o $x \in \left\langle -\frac{3}{2};\infty \right)$. Pro všechna tato čísla platí: $L \geq 0 \quad P > 0 \Rightarrow$ obě strany

$2\sqrt{2x+3} > 7 \quad /^2 \qquad\qquad 4(2x+3) > 49$

$x > \frac{35}{8} \qquad\qquad K = \left(\frac{35}{8};\infty \right)$

Př. 2: Vyřeš nerovnici $\sqrt{x^2+x+2} > x-3$.

a) podmínky

řešíme nerovnici $x^2+x+2 \geq 0$ hledáme kořeny rovnice $x^2+x+2=0 \Rightarrow$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-5}}{2} \Rightarrow$ rovnice $x^2+x+2=0$ nemá řešení

Nerovnice $x^2+x+2 \geq 0$ platí pro všechna $x \in R$, za x můžeme dosadit cokoliv a pod odmocninou bude kladné číslo.

b) znaménka

- Levá strana: odmocnina $\Rightarrow$ vždy nezáporná $L > 0$
- Pravá strana: $P = x-3$ - může být kladná i záporná
  $x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$
  $x \in (-\infty;3\rangle \Rightarrow P \leq 0$ pravá strana záporná
  $x \in \langle 3;\infty) \Rightarrow P \geq 0$ pravá strana kladná

c) řešení

1. $x \in (-\infty;3\rangle$: $L > 0 \quad P \leq 0 \Rightarrow L > P$

to je to, co chceme $\Rightarrow K_1 = (-\infty;3\rangle$

2. $x \in \langle 3;\infty)$: $L \geq 0 \quad P \geq 0$

$\sqrt{x^2+x+2} > x-3 \quad /^2$

$x^2+x+2 > x^2-6x+9$

$x > 1 \qquad\qquad K_2 = \langle 3;\infty)$

$K = (-\infty;3\rangle \cup \langle 3;\infty) = R$

Př. 3: Vyřeš nerovnici $\sqrt{x-x^2+12}<\sqrt{7-3x}$.

a) podmínky

- **levá strana:** řešíme nerovnici $-x^2+x+12\geq 0$
  $x_1=4$, $x_2=-3$
  Do levé strany nerovnice můžeme dosazovat pouze $x\in\langle -3;4\rangle$.
- **pravá strana:** řeším nerovnici $7-3x\geq 0$ $\qquad \frac{7}{3}\geq x$

Nerovnici můžeme řešit pouze pro $x\in\left\langle -3;\frac{7}{3}\right\rangle$.

b) znaménka $L\geq 0$ $P\geq 0$

c) řešení

obě strany jsou kladné, nerovnici můžeme umocnit a nemusíme obracet nerovnost

$\sqrt{x-x^2+12}<\sqrt{7-3x}$ $\quad /^2$

$0<x^2-4x-5$

řešíme nerovnici $x^2-4x-5>0$ $\qquad x_1=5$, $x_2=-1$

Řešením nerovnice $x^2-4x-5>0$ jsou $x\in(-\infty;-1)\cup(5;\infty)$.

My jsme nerovnici řešili pouze pro $x\in\left\langle -3;\frac{7}{3}\right\rangle$.

Řešením nerovnice $\sqrt{x-x^2+12}<\sqrt{7-3x}$ je $K=\langle -3;-1)$.

Př. 4: Vyřeš nerovnici $3\sqrt{3x-x^2-2}\geq x$.

a) podmínky

- **levá strana**: řešíme nerovnici $3x-x^2-2\geq 0$
  $x_1=1$, $x_2=2$

Nerovnici můžeme řešit pouze pro $x\in\langle 1;2\rangle$.

b) znaménka $L\geq 0$

Pravá strana: $P=x$ - může být kladná i záporná

$x\in(-\infty;0\rangle\Rightarrow P\leq 0$ pravá strana záporná

$x\in\langle 0;\infty)\Rightarrow P\geq 0$ pravá strana kladná

Nerovnici však řešíme pouze pro $x\in\langle 1;2\rangle$, pro tato x je pravá strana vždy kladná.

c) řešení **o**bě strany jsou kladné

$3\sqrt{3x-x^2-2}\geq x$ $\quad /^2$

$9\left(3x-x^2-2\right)\geq x^2$

$10x^2-27x+18\leq 0$ $\qquad x_1=\frac{24}{20}=\frac{6}{5}$, $x_2=\frac{30}{20}=\frac{3}{2}$

Řešením nerovnice $10x^2-27x+18\leq 0$ jsou $x\in\left\langle \frac{6}{5};\frac{3}{2}\right\rangle$.

Řešením nerovnice $3\sqrt{3x-x^2-2}\geq x$ je množina $K=\left\langle \frac{6}{5};\frac{3}{2}\right\rangle$.