

2.7.12 Počítání s odmocninami II

Předpoklady: 2711

Př. 1: Sestav začátek věty o odmocninách, která končí vztahem: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$.

Čísla m a n jsou jako exponenty odmocniny – musí být přirozená.
Číslo a je základem odmocniny – musí být nezáporné.

Pro všechna přirozená čísla m, n a pro každé reálné nezáporné číslo a platí:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Př. 2: Zjednoduš pomocí předchozího pravidla výrazy:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{2^6}}$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$

c) $\sqrt[6]{27} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3^3}}$

a) $\sqrt[3]{\sqrt{2^6}} = \sqrt[2 \cdot 3]{2^6} = \sqrt{2^6} = 2$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt[2 \cdot 3]{2^3} = \sqrt[3]{2^3} = \sqrt{2}$

c) $\sqrt[6]{27} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3^3}} = \sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3^3}} = \sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3^3} = \sqrt[6]{3^3} \cdot 3 = \sqrt[6]{3^6} = 3$

Př. 3: Částečně odmocni výraz $\sqrt[6]{a^{15}}$.

$$\sqrt[6]{a^{15}} = \sqrt[6]{a^6} \cdot \sqrt[6]{a^6} \cdot \sqrt[6]{a^3} = a \cdot a \cdot \sqrt[2 \cdot 3]{a^3} = a^2 \cdot \sqrt[3]{\sqrt{a^3}} = a^2 \sqrt{a}$$

Předchozí výpočet je možné urychlit pomocí další (a poslední) věty:

Pro všechna přirozená čísla m, n, p a pro každé nezáporné číslo a platí:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^{mp}}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Př. 4: Částečně odmocni výraz $\sqrt[6]{a^{15}}$.

$$\sqrt[6]{a^{15}} = \sqrt[2 \cdot 3]{a^{3 \cdot 5}} = \sqrt{a^5} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a} = a^2 \sqrt{a}$$

Př. 5: Zjednoduš pomocí předchozího pravidla následující výrazy:

a) $\sqrt[12]{2^{18}}$

b) $\sqrt[4]{4}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{a} \sqrt{a^{10}}}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^3} \cdot \sqrt[10]{a^5}}$

a) $\sqrt[12]{2^{18}} = \sqrt[2 \cdot 6]{2^{3 \cdot 6}} = \sqrt[2]{2^3} = 2\sqrt{2}$

b) $\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt[2 \cdot 2]{2^2} = \sqrt{2} = \sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{a} \sqrt{a^{10}}} = \sqrt[3]{a a^5} = \sqrt[3]{a^6} = a^2$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^3} \cdot \sqrt[10]{a^5}} = \sqrt[3]{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^3}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^3}} = \sqrt{a}$

Poslední vztah nepoužíváme pouze pro zjednodušování odmocnin, ale někdy i obráceně.

Zkusíme napsat výraz $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3}$ jednou odmocninou. \Rightarrow **Problém:** vzorec $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ můžeme požit pouze v případě, že jde o stejný typ odmocniny, zatím máme každou odmocninu jinou.

Vzorec $\sqrt[n]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$ nám umožní změnit:

- $\sqrt[3]{a^2}$ na odmocninu šestou, devátou, dvanáctou, patnáctou...
- $\sqrt[4]{a^3}$ na odmocninu osmou, dvanáctou, šestnáctou ...

\Rightarrow Obě odmocniny převedeme na dvanácté (připomíná to převádění na společný jmenovatel při sčítání zlomků): $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3} = \sqrt[3 \cdot 4]{a^{2 \cdot 4}} \cdot \sqrt[4 \cdot 3]{a^{3 \cdot 3}} = \sqrt[12]{a^8 \cdot a^9} = \sqrt[12]{a^{8+9}} = \sqrt[12]{a^{17}} = a \cdot \sqrt[12]{a^5}$.

Př. 6: Vyjádři součin pomocí jediné odmocniny:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9}$

b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[5]{9}$

c) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^5}$

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[2 \cdot 3]{3^3} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 3^2} = \sqrt[6]{3^5} = \sqrt[6]{3^5} = 3 \cdot \sqrt[6]{3}$

b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[5]{9} = \sqrt[20]{3^{10}} \cdot \sqrt[20]{3^5} \cdot \sqrt[20]{3^8} = \sqrt[20]{3^{10+5+8}} = \sqrt[20]{3^{23}} = 3 \cdot \sqrt[20]{3^3}$

c) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^5} = \sqrt[2 \cdot 3]{a^3} \cdot \sqrt[3 \cdot 2]{a^{2 \cdot 2}} \cdot \sqrt[6]{a^5} = \sqrt[6]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^4} \cdot \sqrt[6]{a^5} = \sqrt[6]{a^{3+4+5}} = \sqrt[6]{a^{12}} = \sqrt[6]{a^{2 \cdot 6}} = a^2$

Pedagogická poznámka: Někteří studenti mají s předchozím příkladem problémy.

V některých případech pomáhá, když studentům ještě jednou připomenete, že chování mocnin a odmocnin připomíná sčítání zlomků.

Př. 7: Zjednoduš výraz $\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a}}}$.

$$\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a}}} = \sqrt{\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)^3 \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^3} \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3} \cdot \frac{b}{a}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}} = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

Př. 8: Zjednoduš výrazy:

a) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

b) $\sqrt[4]{4\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$

a) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2\sqrt{2^2}\sqrt{2}} = \sqrt{2\sqrt{2^3}} = \sqrt{2^4\sqrt{2}} = \sqrt{2^4\sqrt[4]{2^3}} = \sqrt[4]{2^7} = \sqrt[8]{2^7}$

b) $\sqrt[4]{4\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} = \sqrt[4]{2^2\sqrt[3]{2^2}\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2^2\sqrt[3]{2^3}} = \sqrt[4]{2^2\sqrt[6]{2^3}} = \sqrt[4]{2^2\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2^4\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2^5} = \sqrt[8]{2^5}$

Pedagogická poznámka: Opět příklad na procvičení postupného upravování, orientace a odolnosti proti zbrklému rychlořešení.

Př. 9: Zjednoduš výrazy:

a) $\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}$ b) $\sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{5}}$ c) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

a) $\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1$

b) $\sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{5}} = \sqrt{(3-\sqrt{5}) \cdot (3+\sqrt{5})} = \sqrt{9-5} = \sqrt{4} = 2$

c) $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{1+2\sqrt{3}+3} = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = 1+\sqrt{3}$

Pedagogická poznámka: Body a) a c) počítáme společně u tabule. U bodu a) se při výkladu snažím, abychom uvažovali dopředu a přemýšleli už při usměrňování zlomku, jaký výraz by se nám hodil v čitateli (studenti mají tendenci zápornky roznásobit a tím ztratí druhou mocninu. Poslední bod c) je v podstatě vychytávkou, kterou nemá šanci student, který nezná použitý trik, samostatně vyřešit. Tímto způsobem to studentům podávám s tím, že je přesto zajímavé, že při zpětném pohledu to jinak ani být nemohlo.

Př. 10: Petáková:

- strana 60/cvičení 28 a)
- strana 60/cvičení 30 h)
- strana 60/cvičení 31 a)
- strana 60/cvičení 35 b) d)
- strana 60/cvičení 36 b)

Shrnutí: