

2.7.8 Druhá odmocnina

Předpoklady: 2707

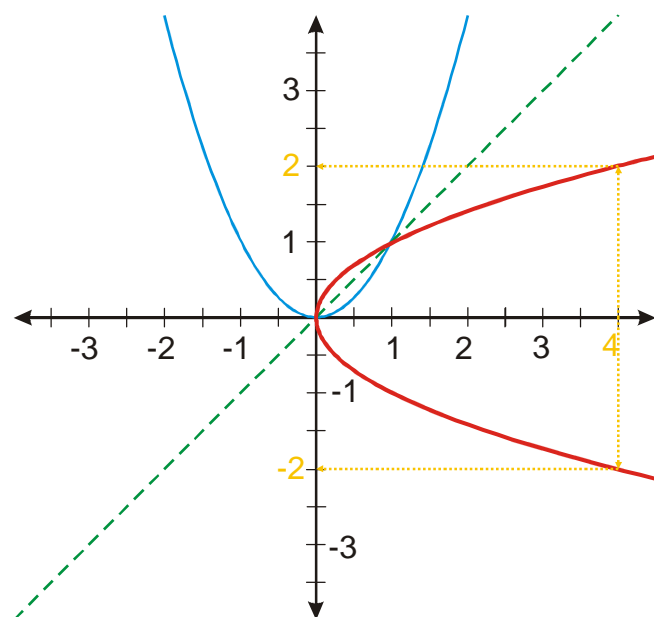
Pedagogická poznámka: Tato hodina není příliš nabitá, pokud jste nestihli poslední příklad z minulé hodiny 2707, dá se stihnout na začátku této hodiny.

Př. 1: Je dána funkce $y = x^2$. Rozhodni, zda k ní existuje funkce inverzní.

Inverzní funkce k funkci $y = x^2$ neexistuje.

Funkce $y = x^2$ není prostá, je sudá. Například platí $4 = 2^2 = (-2)^2 \Rightarrow$ pro $x = 2$ a $x = -2$ získáme stejnou hodnotu \Rightarrow po provedení inverze bychom měli pro $x = 4$ dvě hodnoty $y = 2$ a $y = -2$.

Př. 2: Nakresli graf funkce $y = x^2$ $x \in \mathbb{R}$. Najdi graf inverzní relace.



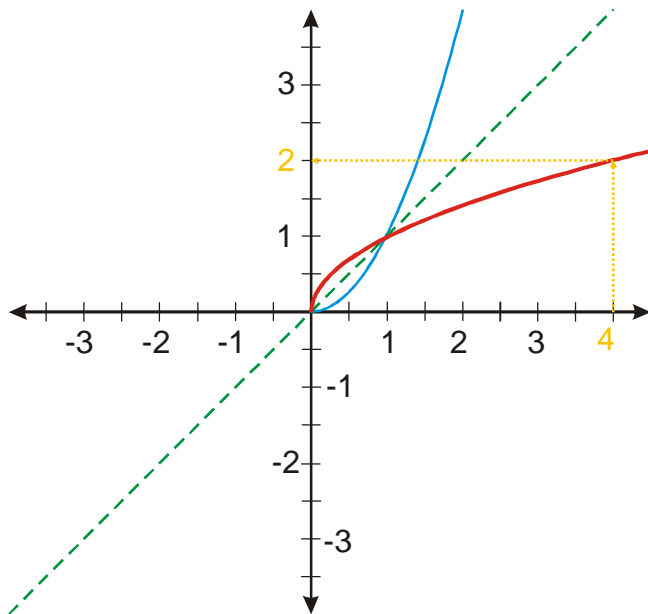
Pedagogická poznámka: Upozorňuji studenty, že existují dvě metody, jak graf inverzní relace nakreslit: využít souměrnosti podle osy $y = x$ a prohození souřadných os. Při zadání předchozího příkladu připomenu studentům, že relace je vlastně „funkce, která nemusí splňovat podmínku jednoznačného přiřazení výsledku“. Nemá cenu ztrácet čas tím, že by studenti něco hledali a pracně vzpomínali.

Inverzní relace není funkce, pro jedno x má více y .
Bylo to jasné, protože $y = x^2$ není prostá funkce.

Nešlo by to přesto nějak ošidit?

Stačilo by, kdyby z grafu $y = x^2$ zbyla jenom polovina.

Př. 3: Nakresli graf funkce $y = x^2 \quad x \in \langle 0; \infty \rangle$. Sestroj graf inverzní funkce a najdi její předpis. Urči definiční obory a obory hodnot obou funkcí.



Původní funkce je prostá. Inverzní relace je funkce (pro každé x máme jediné y).
Hledáme předpis:

Prohodíme x a y : $y = x^2 \Rightarrow x = y^2$

$y = \sqrt{x}$.

$D(f) = H(f^{-1}) = \langle 0; \infty \rangle$, $H(f) = D(f^{-1}) = \langle 0; \infty \rangle$.

Co znamená zápis $\sqrt{4}$?

Dvojice pro $y = x^2$	Dvojice pro $y = \sqrt{x}$
$0 = 0^2$	$0 = \sqrt{0}$
$1 = 1^2$	$1 = \sqrt{1}$
$4 = 2^2$	$2 = \sqrt{4}$
$9 = 3^2$	$3 = \sqrt{9}$

Jaké číslo hledáme, když napíšeme $\sqrt{25}$?

Hledáme kladné číslo (obor hodnot je roven definičnímu oboru původní funkce $x \in \langle 0; \infty \rangle$, proto kladné), které se po umocnění rovná 25 ($\sqrt{25} = 5$, protože $5^2 = 25$).

Př. 4: Rozhodni bez kalkulačky, zda platí $\sqrt{12544} = 112$.

Pokud platí rovnost v zadání (dvojice z inverzní funkce) musí platit i rovnost $112^2 = 12544$ (to už se dá vynásobit pod sebe).

$$\begin{array}{r}
 112 \\
 112 \\
 \hline
 224 \\
 112 \\
 \hline
 112 \\
 12544
 \end{array}$$

Je pravda, že platí $\sqrt{12544} = 112$.

Pedagogická poznámka: Většina studentů sice nejdříve oněmí hrůzou, ale nakonec na to přijde.

Př. 5: Rozhodni bez kalkulačky, zda platí že $\sqrt{13} \doteq 3,6$ (přibližná hodnota).

Pokud platí rovnost v zadání (dvojice z inverzní funkce) musí platit i rovnost $3,6^2 \doteq 13$ (to už se dá vynásobit pod sebe).

$$\begin{array}{r}
 3,6 \\
 3,6 \\
 \hline
 216 \\
 108 \\
 \hline
 12,96
 \end{array}$$

Protože platí, že $3,6^2 \doteq 13$, můžeme říci, že $\sqrt{13} \doteq 3,6$.

Př. 6: Rozhodni bez kalkulačky, zda platí že $\sqrt{11} \doteq -3,3$ (přibližná hodnota).

Rovnost v zadání určitě neplatí, protože odmocnina je vždy kladné číslo. Je pravda, že $(-3,3)^2 = 10,89 \doteq 11$. Věta $\sqrt{11} \doteq 3,3$ je pravdivá.

Pedagogická poznámka: Vždycky se najde část studentů, kteří se nechají natchytat. Buď tím, že počítají na prsto automaticky, nebo protože příliš nevnímají, co se během hodiny říká.

Pozor:

<p>Platí:</p> $2^2 = 4 \text{ a } (-2)^2 = 4$ <p>nebo</p> <p>rovnice $x^2 = 4$ má dva kořeny</p> $K = \{-2; 2\}$	<p>Ale</p>	<p>$\sqrt{4}$ je pouze jediné číslo (když děláme funkci potřebujeme jednoznačný výsledek) a to $\sqrt{4} = 2$</p> <p>Pro rovnici $x^2 = 4$ platí: $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$ (abychom získali z jedné hodnoty odmocniny dva kořeny, musíme ji násobit 1 a -1)</p>
---	-------------------	--

Je počítání odmocnin na něco dobré?

Př. 7: Čtvercový pozemek má mít plochu 250 m^2 . Urči jak dlouhá bude jeho strana.

strana pozemku x

Obsah čtverce: $S = x^2$

Dosadíme: $250 = x^2$

$$\sqrt{250} = x$$

$$x \doteq 15,8$$

Strana pozemku musí mít délku přibližně 15,8 m.

Takových příkladů ve v praxi spousta. Bez odmocnin by byl život daleko těžší.

Opět jsme hledali odmocninu jako číslo, které se po umocnění něčemu rovná.

Nevadí, že $2 = \sqrt{4}$, ale $\sqrt{250}$ nejde napsat konečným desetinným rozvojem ani zlomkem (je iracionální)? **Není to problém**, $\sqrt{250}$ si dokážeme spočítat na libovolný počet míst a získanou hodnotu dosadit. Když chceme přesnou hodnotu píšeme symbol $\sqrt{250}$.

Například kalkulačky určí $\sqrt{250} \doteq 15,8113883$. To není přesná hodnota, i když kalkulačka spočte $(15,8113883)^2 = 250$. Kalkulačka zaokrouhluje, ve skutečnosti platí:

$(15,8113883)^2 = 249,9999997337689$. Kalkulačka zaokrouhlila až na 11 platné číslici \Rightarrow tímto by způsobila při odměření plochy pozemku chybu menší než $0,00000003 \text{ m}^{-2} = 0,03 \text{ mm}^{-2}$ (s takovou přesností rozhodně pozemek vyměřovat nebudeme).

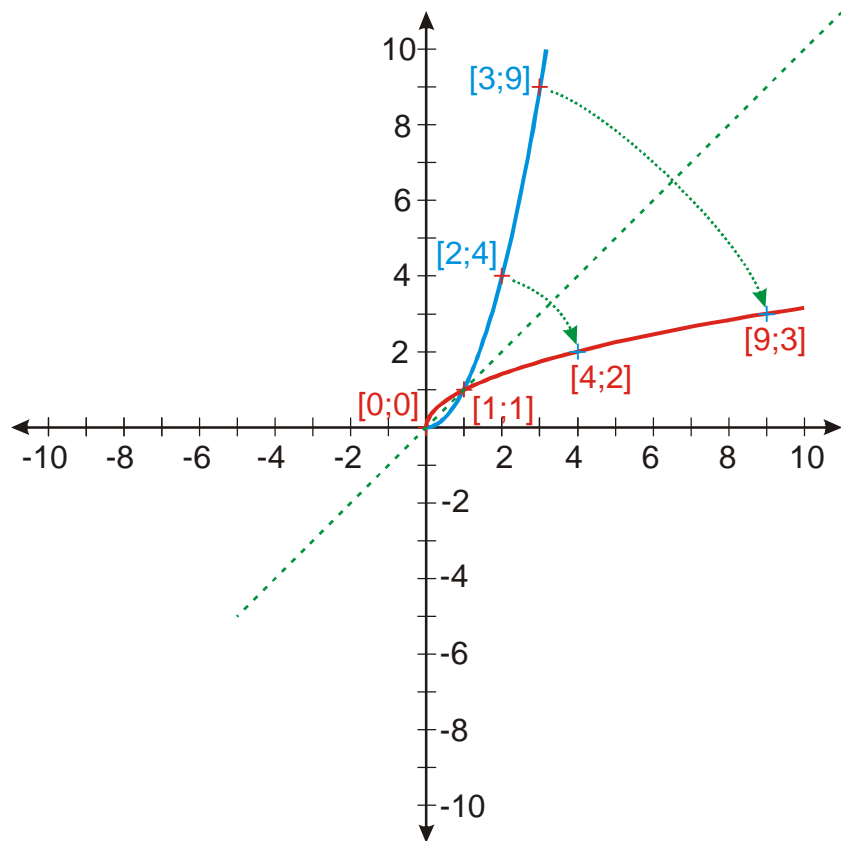
Není problém spočítat odmocninu na daleko větší počet míst. Výpočet $\sqrt{250}$ na 10000 míst trvá na běžném počítači řádově sekundu. Kvůli úspoře místa uvádíme pouze prvních přibližně 300 (přesně 298) míst:

15,81138830084189665999446772216359266859777569662608413428752426396297219
31961911067212405418965014759367364207642002757427442801522694000734525979
83500769516724608285896299703295750767370566697420620426584647885452357882
30522184628939531018904304970914185855774203164276499559298412282101663480

Druhá odmocnina z nezáporného reálného čísla a je takové nezáporné reálné číslo b , pro které platí $b^2 = a$. Píšeme $b = \sqrt{a}$.

Př. 8: Pomocí grafu funkce $y = x^2$ nakresli graf funkce $y = \sqrt{x}$ a urči její vlastnosti.

Nakreslíme graf funkce $y = x^2$, $x \in \langle 0; \infty \rangle$ a sestrojíme graf inverzní funkce.



Vlastnosti funkce $y = \sqrt{x}$:

Rostoucí - $x \in \langle 0; \infty \rangle$, klesající není nikdy.

$D(f) = \langle 0; \infty \rangle$ (hodnoty funkce $y = x^2$ jsou vždy kladné)

$H(f) = \langle 0; \infty \rangle$ (při z inverzňování jsme omezili definiční obor $y = x^2$ na $x \in \langle 0; \infty \rangle$)

Shrnutí: Pokud omezíme definiční obor kvadratické funkce na $\langle 0; \infty \rangle$, získáme prostou funkci, k níž inverzní funkcí je funkce druhá odmocnina. Hodnoty druhé odmocniny ověřujeme pomocí umocňování.