2.5.6 Neúplné kvadratické rovnice

Předpoklady: 2501

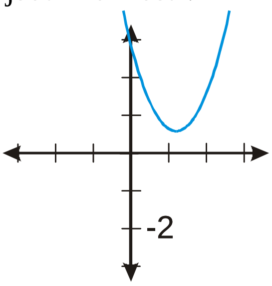
Pedagogická poznámka: Tato hodina patří mezi vzácné výjimky, kdy naprostá většina studentů skončí více než pět minut před zvoněním. Nechávám je dělat něco jiného nebo počítat si to, co jim nejde. Považuji za zbytečné do hodiny něco přidávat. Každá další rovnice mě připadá jako zbytečné opakování nějaké jiné, která už obsažena je.

Kvadratická rovnice je každá rovnice ve tvaru: $ax^2+bx+c=0$.
Kvadratická = obsahuje x^2 $\Rightarrow$ podmínka $a\neq 0$ (aby x^2 nezmizelo).

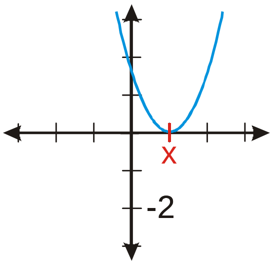
Vzorec pro řešení už známe, teď to probereme trochu hlouběji.

Př. 1: Pomocí grafů kvadratické funkce, rozhodni kolik kořenů může mít kvadratická rovnice.

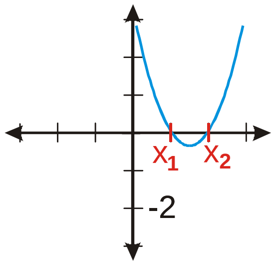
Řešíme kvadratickou rovnici $ax^2+bx+c=0$.
Levá strana je předpis kvadratické funkce $y=ax^2+bx+c$ $\Rightarrow$ když řešíme rovnici, zjišťujeme, pro které x je hodnota funkce rovna 0 $\Rightarrow$ hledáme průsečíky s osou x.
Jaké jsou možnosti?



žádný průsečík
žádné řešení



1 průsečík
1 řešení



2 průsečíky
2 řešení

Kvadratická rovnice může mít pouze žádné, jedno nebo dvě řešení.

Zkusíme nejdříve jednodušší případy – případy, kdy v rovnici něco chybí.
Nejdříve zkusíme rovnice, kde $c=0$ **(kvadratické rovnice bez absolutního členu)**.

Př. 2: Najdi všechna řešení kvadratické rovnice $x^2-2x=0$.

$x^2-2x=0$ - můžeme vytknout x
$x(x-2)=0$ - rovnice v součinovém tvaru, zjišťujeme, kdy se závorky v součinu rovnají nule.
a) $x=0$ - první kořen zadarmo
b) $x-2=0\Rightarrow x=2$ - druhý kořen taky levně
$K=\{0;2\}$

Př. 3: Najdi všechna řešení kvadratické rovnice:
a) $x^2+x=0$ b) $4x^2+3x=0$ c) $\sqrt{2}x^2-\pi x=0$

a)
$x^2+x=0$ - můžeme vytknout x
$x(x+1)=0$ - rovnice v součinovém tvaru, zjišťujeme, kdy se závorky v součinu rovnají nule.
$x_1=0$ $x+1=0 \Rightarrow x_2=-1$
$K=\{-1;0\}$
b)
$4x^2+3x=0$ - můžeme vytknout x
$x(4x+3)=0$ - rovnice v součinovém tvaru, zjišťujeme, kdy se závorky v součinu rovnají nule.
$x_1=0$ $4x+3=0 \Rightarrow x_2=-\frac{3}{4}$
$K=\left\{-\frac{3}{4};0\right\}$
c)
$\sqrt{2}x^2-\pi x=0$ - můžeme vytknout x
$x\left(\sqrt{2}x-\pi\right)=0$ - rovnice v součinovém tvaru, zjišťujeme, kdy se závorky v součinu rovnají nule.
$x_1=0$ $\sqrt{2}x-\pi=0 \Rightarrow x_2=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$
$K=\left\{0;\frac{\pi\sqrt{2}}{2}\right\}$

Př. 4: Najdi všechna řešení kvadratické rovnice $ax^2+bx=0$.

$ax^2+bx=0$ - můžeme vytknout x
$x(ax+b)=0$ - rovnice v součinovém tvaru, zjišťujeme, kdy se závorky v součinu rovnají nule.
$x_1=0$ - první kořen zadarmo
$ax+b=0 \Rightarrow x_2=-\frac{b}{a}$ (vydělit a můžeme, protože máme podmínku $a\neq 0$)
$K=\left\{-\frac{b}{a};0\right\}$

Př. 5: Rozhodni, zda může mít rovnice bez absolutního členu pouze jedno řešení.

Jeden kořen je vždy $0 \Rightarrow$ druhý by musel být taky nula.
Druhý kořen $-\frac{b}{a}=0 \Rightarrow b=0$.

Rovnice bez absolutního členu může mít pouze jeden kořen, pokud platí, že $b = 0$, pak jde o rovnici $ax^2 = 0$.

Zkusíme druhou možnost. Kvadratická rovnice kde $b = 0$.
Zbude $ax^2 + 0x + c = ax^2 + c = 0$ - **ryze kvadratická rovnice**.

Př. 6: Najdi všechna řešení kvadratické rovnice $x^2 - 4 = 0$.

$x^2 - 4 = 0$ - můžeme rozložit na součin (vzorec $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.
$(x+2)(x-2) = 0$ - rovnice v součinovém tvaru, zjišťujeme, kdy se závorky v součinu rovnají nule.
$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ - první kořen levně $\quad$ $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ - druhý kořen taky levně
$K = \{-2; 2\}$

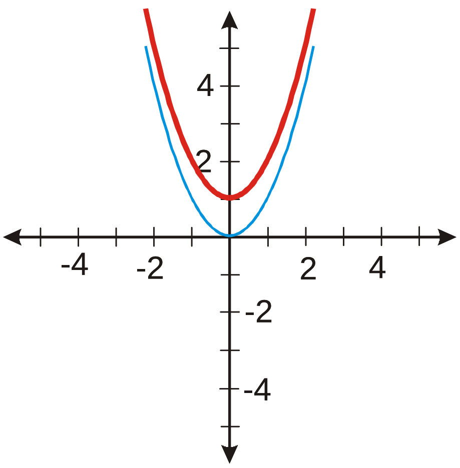
Poznámka: Rovnici je možné vyřešit i jinak:
$x^2 - 4 = 0$
$x^2 = 4$, hledáme čísla, která po umocnění na druhou dají 4 $\Rightarrow$ $x_1 = 2$, ale to není jediná možnost $x_2 = -2$, protože $(-2)^2 = 4$.
$K = \{\pm 2\}$
Lepší je používat první způsob, druhý často vede k zapomenutí záporného kořene.

Př. 7: Najdi všechna řešení kvadratické rovnice $x^2 + 1 = 0$.

$x^2 + 1 = 0$ - nemůžeme rozložit na součin (vzorec $a^2 + b^2 = ...$ neexistuje)
Zkusíme to i jinak: $x^2 + 1 = 0$
$x^2 = -1$ $\Rightarrow$ hledáme čísla, která po umocnění na druhou dají –1.
Žádné takové číslo neexistuje $\Rightarrow$ $K = \emptyset$.

Př. 8: Pomocí grafu zdůvodni, proč předchozí rovnice nemá řešení.

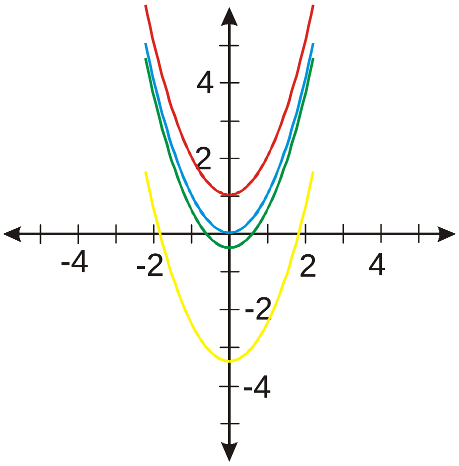
Nakreslíme graf funkce $y = x^2 + 1$ a pomocí průsečíků s osou *x* určíme kořeny.



Graf funkce $y = x^2 + 1$, se s osou *x* nikde neprotíná $\Rightarrow$ rovnice $x^2 + 1 = 0$ nemá žádné řešení.

Př. 9: Pomocí grafu zdůvodni, pro která čísla b má rovnice $x^2+b=0$ řešení.

Kreslíme grafy funkcí $y=x^2+b$.



Funkce se liší posunutím ve svislém směru, aby protnuly osu y musejí se posunout dolů nebo zůstat ve výchozí pozici $\Rightarrow$ b musí být záporné nebo nula, $b\in(-\infty;0\rangle$.

Př. 10: Najdi všechna řešení kvadratické rovnice:

a) $25x^2-1=0$ b) $4x^2-9=0$ c) $x^2-6=0$

d) $3x^2-4=0$ e) $\pi x^2-\sqrt{3}=0$

a)

$25x^2-1=0$ - můžeme rozložit na součin - vzorec $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

$(5x+1)\cdot(5x-1)=0$ - rovnice v součinovém tvaru, zjišťujeme, kdy se závorky v součinu rovnají nule.

$5x+1=0\Rightarrow x_1=-\frac{1}{5}$ $5x-1=0\Rightarrow x_2=\frac{1}{5}$

$K=\left\{-\frac{1}{5};\frac{1}{5}\right\}$

b)

$4x^2-9=0$ - můžeme rozložit na součin - vzorec $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

$(2x+3)\cdot(2x-3)=0$ - rovnice v součinovém tvaru, zjišťujeme, kdy se závorky v součinu rovnají nule.

$2x+3=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}$ $2x-3=0\Rightarrow x_2=\frac{3}{2}$

$K=\left\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\}$

c)

$x^2-6=x^2-\left(\sqrt{6}\right)^2=0$ - můžeme rozložit na součin - vzorec $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

$\left(x+\sqrt{6}\right)\cdot\left(x-\sqrt{6}\right)=0$ - rovnice v součinovém tvaru, zjišťujeme, kdy se závorky v součinu rovnají nule.

$x+\sqrt{6}=0 \Rightarrow x=-\sqrt{6}$ $\qquad$ $x-\sqrt{6}=0 \Rightarrow x_2=\sqrt{6}$

$K=\{-\sqrt{6};\sqrt{6}\}$

d)

$3x^2-4=0$ - můžeme rozložit na součin (vzorec $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

$(\sqrt{3}x+2)\cdot(\sqrt{3}x-2)=0$ - rovnice v součinovém tvaru, zjišťujeme, kdy se závorky v součinu rovnají nule.

$\sqrt{3}x+2=0 \Rightarrow x_1=-\frac{2}{\sqrt{3}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ $\qquad$ $\sqrt{3}x-2=0 \Rightarrow x_2=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$K=\left\{-\frac{2\sqrt{3}}{3};\frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$

e)

$\pi x^2-\sqrt{3}=0$ - i tato rovnice se dá rozložit na součin.

$\pi x^2-\sqrt{3}=\left(\sqrt{\pi}x\right)^2-\left(\sqrt[4]{3}\right)^2=\left(\sqrt{\pi}x+\sqrt[4]{3}\right)\left(\sqrt{\pi}x-\sqrt[4]{3}\right)=0$ - opět součinový tvar

$\sqrt{\pi}x+\sqrt[4]{3}=0 \Rightarrow x_1=-\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{\pi}}$ $\qquad$ $\sqrt{\pi}x-\sqrt[4]{3}=0 \Rightarrow x_2=\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{\pi}}$

$K=\left\{--\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{\pi}};-\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{\pi}}\right\}$

Pedagogická poznámka: V posledním bodu předchozího příkladu by se zřejmě mělo psát $\sqrt{\sqrt{3}}$ místo $\sqrt[4]{3}$. Obojí je to samé, ale studenti to ještě nevědí (i když by pomocí mocnin bylo možné tuto rovnost vysvětlit, v tento okamžik to nedělám a nechávám to na kapitolu o odmocninách).

Př. 11: Petáková:
strana 12/cvičení 4 a) b)

Shrnutí: Převedením na součinový tvar můžeme rychleji řešit kvadratické rovnice bez absolutního nebo lineárního členu.