## 2.4.11 Nerovnice s absolutní hodnotou

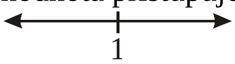
**Předpoklady:** 2206, 2409, 2410

**Pedagogická poznámka:** Hlavním záměrem hodiny je, aby si studenti uvědomili, že se neučí nic nového. Pouze používají věci, které dávno znají, na částečně nové situace, ale pokud v těchto situacích, budou dodržovat stará pravidla, nemohou se zmýlit.

**Pedagogická poznámka:** Obsah hodiny přesahuje 45 minut. Většina studentů by potřebovala minimálně polovinu další vyučovací hodiny na spočtení celé hodiny.

**Př. 1:** Vyřeš nerovnici $|x-1| \le 2$ všemi způsoby používanými při řešení rovnic.

**1. způsob – odstranění absolutní hodnoty dělením *R* na intervaly (jako u funkcí)**
Kdy číslo uvnitř absolutní hodnoty mění znaménko (a tedy i způsob, jakým k němu absolutní hodnota přistupuje)? $\Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$




$\Rightarrow$ 2 intervaly

$x \in (-\infty;1\rangle$ $\quad x-1 \le 0 \Rightarrow |x-1| = -(x-1) = -x+1$

Řešíme nerovnici: $|x-1| \le 2$.

$-x+1 \le 2$

$-1 \le x$ Nerovnosti vyhovuje interval $\langle -1;\infty)$, ale počítáme pouze s čísly v intervalu $x \in (-\infty;1\rangle \Rightarrow K_1 = \langle -1;1\rangle$.

$x \in \langle 1;\infty)$ $\quad x-1 \ge 0 \Rightarrow |x-1| = x-1$

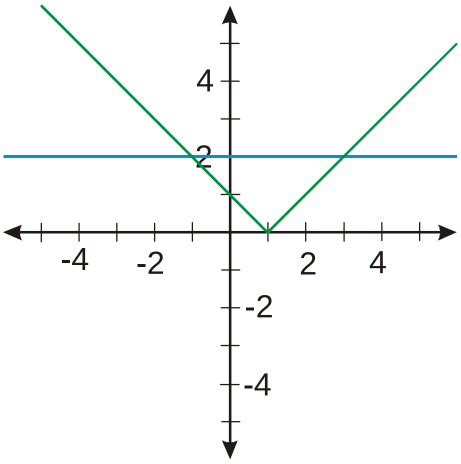
Řešíme nerovnici: $|x-1| \le 2$.

$x-1 \le 2$

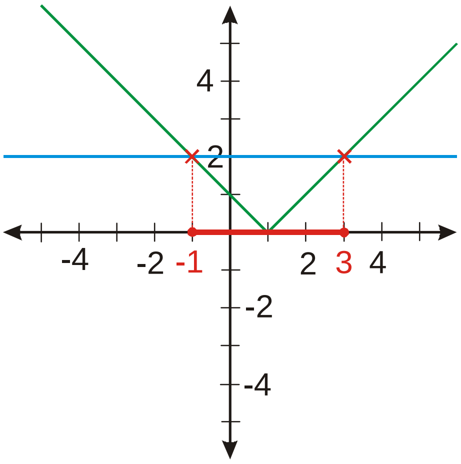
$x \le 3$ Nerovnosti vyhovuje interval $x \in (-\infty;3\rangle$, ale počítáme pouze s čísly v intervalu $x \in \langle 1;\infty) \Rightarrow K_2 = \langle 1;3\rangle$.

$K = K_1 \cup K_2 = \langle -1;3\rangle$

**2. způsob - grafické řešení**
Nakreslíme grafy funkcí: $y = |x-1|$ (levá strana nerovnice), a $y = 2$ (pravá strana nerovnice).




Hledáme takové hodnoty *x*, pro které je levá strana nerovnice (funkce $y = |x-1|$) menší nebo rovná pravé straně (funkci $y = 2$). Hodnoty obou stran jsou znázorněné *y*-vou souřadnicí obou funkcí. Hledáme tedy *x*, pro něž je bod grafu funkce $y = |x-1|$ níže nebo stejně vysoko jako bod grafu funkce $y = 2$.

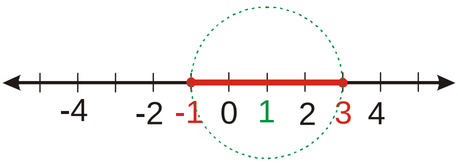



$K = \langle -1;3 \rangle$

**3. způsob – využití významu absolutní hodnoty z rozdílu dvou čísel**

$|a-b|$ je vzdálenost obrazů čísel *a* a *b* na číselné ose.

$|x-1| \le 2 \Rightarrow$ hledáme body, které mají od 1 vzdálenost rovnou nebo menší než 2.




$K = \langle -1;3 \rangle$

**Př. 2:** Vyřeš nerovnici $|x+1| > -1$ pomocí všech tří předchozích metod. Metodu dělení definičního oboru použij jako poslední.

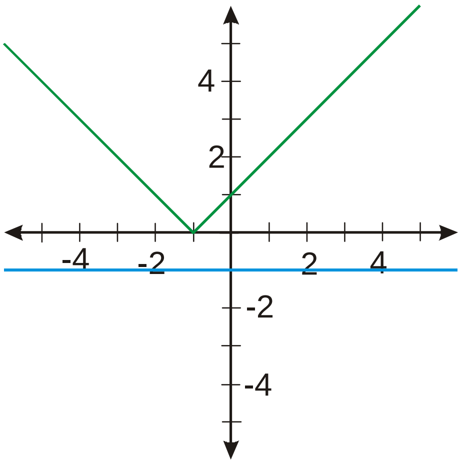
**1. způsob – využití významu absolutní hodnoty z rozdílu dvou čísel**

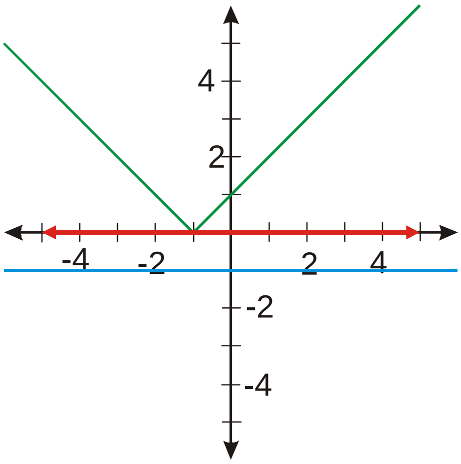
$|a-b|$ je vzdálenost obrazů čísel *a* a *b* na číselné ose.

Upravíme výraz v absolutní hodnotě: $|x+1| = |x-(-1)| > -1$

Zápis: $|x-(-1)| > -1$ znamená $\Rightarrow$ hledáme body, které mají od -1 vzdálenost větší než $-1 \Rightarrow$ řešením nerovnice jsou všechna reálná čísla, protože vzdálenost libovolného čísla od čísla $-1$ je nezáporná a tedy větší než $-1$.
$K = R$

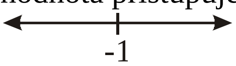
**2. způsob - grafické řešení**
Nakreslím grafy funkcí: $y = |x+1|$ (levá strana rovnice) a $y = -1$ (pravá strana rovnice).




Všechny body grafu funkce $y = |x+1|$ jsou nad body grafu funkce $y = -1$. Řešením nerovnice je množina *R*.
$K = R$

**3. způsob – odstranění absolutní hodnoty dělením *R* na intervaly**
Kdy číslo uvnitř absolutní hodnoty mění znaménko (a tedy i způsob, jakým k němu absolutní hodnota přistupuje)? $\Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$




$\Rightarrow$ 2 intervaly

$x \in (-\infty;-1\rangle$ $\qquad x+1 \le 0 \Rightarrow |x+1| = -(x+1) = -x-1$

Řešíme nerovnici: $|x+1| > -1$.

$-x-1 > -1$

$0 > x$ Zdá se, že řešením je interval $\left(-\infty;0\right\rangle$, ale musíme z něj započíst pouze čísla, se kterými jsme počítali (interval $\left(-\infty;-1\right\rangle$ ) $\Rightarrow$ $K_1 = \left(-\infty;-1\right\rangle$.

$x \in \left\langle -1;\infty\right)$ $x+1 \leq 0 \Rightarrow \left|x+1\right| = -\left(x+1\right) = -x-1$

Řešíme nerovnici: $\left|x+1\right| > -1$.

$x+1 > -1$

$x > -2$ Zdá se, že řešením je interval $\left\langle -2;\infty\right)$ , ale musíme z něj započíst pouze čísla, se kterými jsme počítali (interval $\left\langle -1;\infty\right)$) $\Rightarrow$ $K_2 = \left\langle -1;\infty\right)$.

$K = K_1 \cup K_2 = R$

**Pedagogická poznámka:** Existují studenti, kteří píší do předchozího příkladu prázdnou množinu řešení, protože například v kladné části definičního oboru vychází nerovnost $x > -2$ a protože –2 nepatří mezi čísla, se kterými počítali nemůže mít nerovnice řešení. Je třeba jim vysvětlit, že hrana intervalu řešení nehraje takovou roli. Pouze určuje, která z čísel jsou řešením částečné nerovnice, a pokud některé z nich patří mezi ta, se kterými jsme počítali, našli jsme řešení, i přesto, že hrana intervalu je podmínkou vyloučena.

**Pedagogická poznámka:** Studentům činí potíže porovnávat při využívání číselné osy vzdálenost čísel se záporným číslem. Když si osu nakreslíte –1 a zkoušíte jestli podmínka pro vzdálenost platí pro konkrétní čísla, většina z nich se chytí.

**Pedagogická poznámka:** Pokud ukazujete výsledky grafického řešení a všichni studenti ho ještě nemají hotové, ukažte nejdřív pouze obrázek bez řešení, aby se řešení studenti pokusili najít sami.

**Př. 3:** Vyřeš nerovnici $\left|x+2\right|+2<1$ pomocí všech tří předchozích metod. Metodu dělení $R$ použij jako poslední.

**1. způsob – využití významu absolutní hodnoty z rozdílu dvou čísel**

$\left|a-b\right|$ je vzdálenost obrazů čísel $a$ a $b$ na číselné ose.

Upravíme výraz v absolutní hodnotě: $\left|x+2\right| = \left|x-\left(-2\right)\right|$.

Upravíme nerovnici tak, aby na levé straně byla pouze absolutní hodnota: $\left|x-\left(-2\right)\right|+2<1$

$\left|x-\left(-2\right)\right| < -1$.

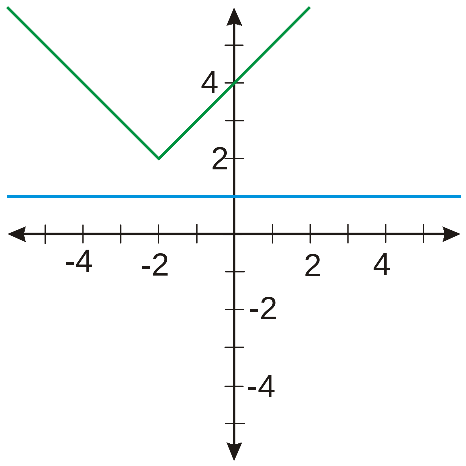
Zápis: $\left|x-\left(-2\right)\right| < -1$ znamená $\Rightarrow$ hledáme body, které mají od -2 vzdálenost menší než –1

$\Rightarrow$ nerovnice nemá řešení, protože vzdálenost libovolného čísla od čísla –2 je nezáporná a tedy větší než –1.

$K = \emptyset$

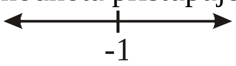
**2. způsob - grafické řešení**

Nakreslím grafy funkcí: $y = \left|x+2\right|+2$ (levá strana rovnice), a $y = 1$ (pravá strana rovnice).




Všechny body grafu funkce $y=|x+2|+2$ jsou nad body grafu funkce $y=1$. Podle zadání nerovnice, má být levá strana menší, hledáme takové body, pro které je graf levé strany níže než graf pravé strany. Žádný takový bod neexistuje. Nerovnice nemá řešení.
$K=\emptyset$

**3. způsob – odstranění absolutní hodnoty dělením *R* na intervaly**
Kdy číslo uvnitř absolutní hodnoty mění znaménko (a tedy i způsob, jakým k němu absolutní hodnota přistupuje?) $\Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$




$\Rightarrow$ 2 intervaly

$x\in(-\infty;-2\rangle$ $\qquad x+2\le 0 \Rightarrow |x+2|=-(x+2)=-x-2$

Řeším nerovnici: $|x+2|+2<1$.

$-x-2+2<1$

$1<x$ Zdá se, že řešením je interval $(1;\infty)$, ale musíme z něj započíst pouze čísla, se kterými jsme počítali (interval $(-\infty;-2\rangle$ ), protože neexistuje žádné číslo, které by bylo v obou intervalech $\Rightarrow$ $K_1=\emptyset$.

$x\in\langle-2;\infty)$ $\qquad x+2\ge 0 \Rightarrow |x+2|=x+2$

Řešíme nerovnici: $|x+2|+2<1$.

$x+2+2<1$

$x<-3$ Zdá se, že řešením je interval $(-\infty;-3)$ , ale musíme z něj započíst pouze čísla se kterými jsme počítali (interval $\langle-2;\infty)$), protože neexistuje žádné číslo, které by bylo v obou intervalech $\Rightarrow$ $K_2=\emptyset$.

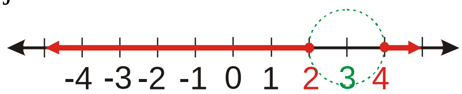
$K=K_1\cup K_2=\emptyset$

**Poznámka:** Dále budeme používat pouze jednu metodu řešení, nejlépe tu nejjednodušší.

**Př. 4:** Vyřeš nerovnici $|x-3|\ge 1$, pomocí nejvhodnějšího postupu. Volbu postupu zdůvodni.

Nejrychleji nerovnici vyřešíme pomocí definice absolutní hodnoty rozdílu dvou čísel. Na levé straně je pouze absolutní hodnota z rozdílu dvou čísel, na pravé straně pouze reálné číslo. Definici tak můžeme ihned použít.

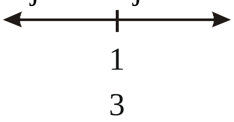
$|x-3| \geq 1 \Rightarrow$ Hledáme čísla, jejichž obrazy na číselné ose jsou od obrazu čísla 3 vzdálené jedna nebo více.




$K = (-\infty; 2\rangle \cup \langle 4; \infty)$

**Př. 5:** Vyřeš nerovnici $|3x-1| < x$.

V nerovnici se vyskytuje neznámá na dvou místech, vlevo je navíc násobená třemi $\Rightarrow$ nejvhodnější metodou je dělení definičního oboru.




$\Rightarrow$ dva intervaly

$x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right\rangle$ $\quad 3x-1 \leq 0 \Rightarrow |3x-1| = -(3x-1) = -3x+1$

Řešíme nerovnici: $|3x-1| < x$.

$-3x+1 < x$

$1 < 4x$

$x > \frac{1}{4}$ Zdá se, že řešením je interval $\left(\frac{1}{4}; \infty\right)$, ale musíme z něj započíst pouze čísla, se kterými jsme počítali (interval $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right\rangle$ ) $\Rightarrow$ $K_1 = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right\rangle$.

$x \in \left\langle \frac{1}{3}; \infty\right)$ $\quad 3x-1 \geq 0 \Rightarrow |3x-1| = 3x-1$

Řešíme rovnici: $|3x-1| < x$

$3x-1 < x$

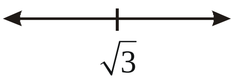
$2x < 1$

$x < \frac{1}{2}$ Zdá se, že řešením je interval $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ , ale musíme z něj započíst pouze čísla, se kterými jsme počítali (interval $\left\langle \frac{1}{3}; \infty\right)$) $\Rightarrow$ $K_2 = \left\langle \frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

$K = K_1 \cup K_2 = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$

**Př. 6:** Vyřeš nerovnici $\left|x-\sqrt{3}\right| > 2+5\sqrt{3}$.

V nerovnici se vyskytují odmocniny $\Rightarrow$ grafické řešení nám nedá přesný výsledek. Použijeme dělení definičního oboru.




$\Rightarrow$ dva intervaly

$x \in \left(-\infty; \sqrt{3}\right\rangle$ $\quad x-\sqrt{3} < 0 \Rightarrow \left|x-\sqrt{3}\right| = -x+\sqrt{3}$

$-x+\sqrt{3}>2+5\sqrt{3}$

$x<-2-4\sqrt{3}$ $\qquad K_1=\left(-\infty;\sqrt{3}\right\rangle \cap \left(-\infty;-2-4\sqrt{3}\right)=\left(-\infty;-2-4\sqrt{3}\right)$

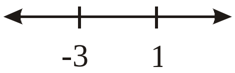
$x\in\left\langle\sqrt{3};\infty\right)$ $\qquad x-\sqrt{3}>0\Rightarrow\left|x-\sqrt{3}\right|=x-\sqrt{3}$

$x-\sqrt{3}>2+5\sqrt{3}$

$x>2+6\sqrt{3}$ $\qquad K_2=\left\langle\sqrt{3};\infty\right)\cap\left(2+6\sqrt{3};\infty\right)=\left(2+6\sqrt{3};\infty\right)$

$K=K_1\cup K_2=\left(-\infty;-2-4\sqrt{3}\right)\cup\left(2+6\sqrt{3};\infty\right)$

**Př. 7:** Vyřeš nerovnici $|1-x|>3|x+3|$.




$\Rightarrow$ tři intervaly

$x\in\left(-\infty;-3\right\rangle$

$1-x>3(-x-3)$

$1-x>-3x-9$

$2x>-10$

$x>-5$ $\qquad K_1=\left(-5;-3\right\rangle$

$x\in\left\langle-3;1\right\rangle$

$1-x>3(x+3)$

$1-x>3x+9$

$-8>4x$

$x<-2$ $\qquad K_2=\left\langle-3;-2\right)$

$x\in\left\langle1;\infty\right)$

$-1+x>3(x+3)$

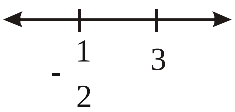
$-1+x>3x+9$

$-10>2x$

$-5>x$ $\qquad K_3=\emptyset$

$K=K_1\cup K_2\cup K_3=\left(-5;-2\right)$

**Př. 8:** Vyřeš nerovnici $|2x+1|-|3-x|>x$.




$\Rightarrow$ tři intervaly

$x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right\rangle$

$-2x-1-(3-x)>x$

$-2x-1-3+x>x$

$-4>2x$

$x < -2$ $\qquad K_1 = (-\infty; -2)$

$x \in \left\langle -\frac{1}{2}; 3 \right\rangle$

$2x + 1 - (3 - x) > x$

$2x + 1 - 3 + x > x$

$2x > 2$

$x > 1$ $\qquad K_2 = (1; 3\rangle$

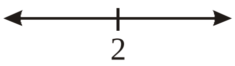
$x \in \langle 3; \infty)$

$2x + 1 + (3 - x) > x$

$0 > -4$ $\qquad K_3 = \langle 3; \infty)$

$K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 = (-\infty; -2) \cup (1; \infty)$

**Př. 9:** Vyřeš nerovnici $\frac{x}{|x-2|} \leq 3$.




$\Rightarrow$ dva intervaly, platí podmínka $|x-2| \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

upravíme nerovnici:

$\frac{x}{|x-2|} \leq 3 \quad / \cdot |x-2|$ výraz, kterým násobíme je vždy kladný, a tak se nemusíme starat o změnu znaménka nerovnosti $\Rightarrow$ řešíme nerovnici $x \leq 3|x-2|$

$x \in (-\infty; 2\rangle$

$x \leq 3(-x+2)$

$x \leq -3x + 6$

$4x \leq 6$

$x \leq \frac{3}{2}$ $\qquad K_1 = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right\rangle$

$x \in \langle 2; \infty)$

$x \leq 3(x-2)$

$x \leq 3x - 6$

$6 \leq 2x$

$3 \leq x$ $\qquad K_2 = \langle 3; \infty)$

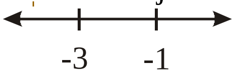
$K = K_1 \cup K_2 = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right\rangle \cup \langle 3; \infty)$

**Př. 10:** Vyřeš nerovnici $\frac{|x+3|}{x+1} \geq 2$.

Podmínka $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

Musíme sledovat znaménko dvou výrazů:

- Výrazu $x+3$, protože je v absolutní hodnotě a jeho znaménko rozhoduje o způsobu odstranění absolutní hodnoty
- Výrazu $x+1$, protože je ve jmenovateli zlomku, potřebujeme jím nerovnici vynásobit a na jeho znaménku závisí, zda budeme měnit znaménko nerovnosti nebo ne.




$\Rightarrow$ tři intervaly

$x \in (-\infty; -3\rangle$

$\frac{-x-3}{x+1} \geq 2 \quad /(x+1)$ - násobíme záporným číslem

$-x-3 \leq 2(x+1)$

$-x-3 \leq 2x+2$

$-5 \leq 3x$

$-\frac{5}{3} \leq x \qquad K_1 = \emptyset$

$x \in \langle -3; -1)$

$\frac{x+3}{x+1} \geq 2 \quad /(x+1)$ - násobíme záporným číslem

$x+3 \leq 2(x+1)$

$x+3 \leq 2x+2$

$1 \leq x \qquad K_2 = \emptyset$

$x \in (-1; \infty)$

$\frac{x+3}{x+1} \geq 2 \quad /(x+1)$ - násobíme kladným číslem

$x+3 \geq 2(x+1)$

$x+3 \geq 2x+2$

$1 \geq x \qquad K_3 = (-1; 1\rangle$

$K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 = (-1; 1\rangle$

**Př. 11:** Řešení předchozího příkladu nebylo zdaleka ideální. Při pečlivém rozvážení jsme mohli ušetřit dvě třetiny výpočtů. Jak a proč?

Stačí si uvědomit, že čitatel zlomku je kladné číslo (nebo nula), znaménko pak závisí pouze na znaménku jmenovatele. Zlomek má být větší než dva, musí být kladný a tak musí být kladný i jeho jmenovatel. První dva intervaly jsme tak mohli vyloučit ihned a stačilo spočítat třetí.

**Př. 12:** Petáková:
strana 15/cvičení 23 a) c) k)

**Shrnutí:** K řešení nerovnic s absolutní hodnotou přistupujeme analogicky jako k řešení rovnic s absolutní hodnotou.