2.4.8 Další příklady s grafy funkcí s absolutní hodnotou

Předpoklady: 2401 - 2407

Pedagogická poznámka: Následující dva příklady je většinou nutné studentům dovysvětlit. Prohlížení vlastních poznámek jim většinou nepřijde dostatečně důstojné. Snažím se jim vysvětlit, že oba příklady jsou důležité, protože se je snaží navést k rozumnému zpracování informací v hlavě. Podobných příkladů, kde se studenti mají naučit vybírat správnou metodu z několika možných obsahuje učebnice více. Už během druhého ročníku jím jsou věnovány celé hodiny.

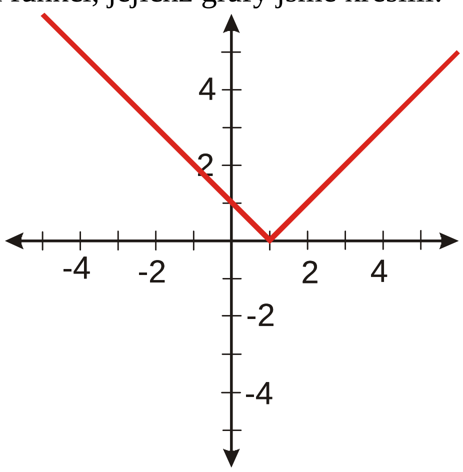
Př. 1: Projdi si všechny grafy funkcí s absolutní hodnotou v předchozích hodinách 2401-2407 a najdi odpověď na následující otázky:
a) V jakých případech mají grafy tvar písmena V nebo obráceného písmena V?
b) V jakých případech je možné použít pro řešení metodu napodobení výpočtu?
c) V jakých případech je možné použít pro řešení metodu dělení definičního oboru?

a) tvar písmena V nebo obráceného písmena V mají funkce, které obsahují pouze jednu absolutní hodnotu a pouze jednu neznámou *x* ve svém předpisu. Jde o funkce, které je možné napsat ve tvaru $y = a|x-b|+c$.

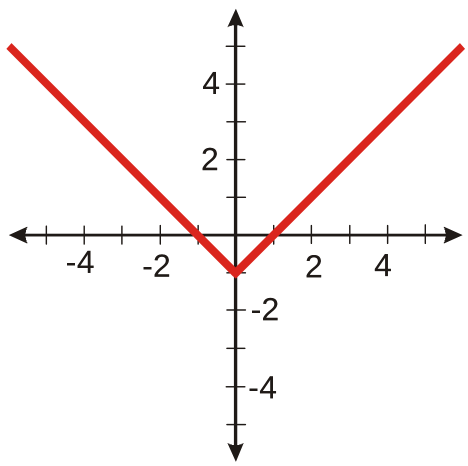
b) metodu napodobení výpočtu jsme používali pouze u funkcí, které mají v předpisu jediný výskyt neznámé *x*. Toto omezení je způsobeno tím, že potřebujeme mít výchozí bod pro nakreslení funkce, kterou poté upravujeme podle jednotlivých operací.
c) metodu dělení definičního oboru je možné použít prakticky kdykoliv. V případě, že absolutní hodnoty jsou vnořeny do sebe, je však její použití velmi obtížné, protože teprve během úprav zjišťujeme, kdy výrazy uvnitř absolutní hodnoty mění znaménko. Metoda napodobení výpočtu je však podstatně rychlejší a proto ji dáváme přednost.

Př. 2: Na základě příkladů řešených v předchozích hodinách 2401-2407 rozhodni, jaký tvar mají grafy funkcí daných předpisem $y = a|x-b|+c$. Jakým způsobem ovlivňují tvar výsledného grafu hodnoty konstant *a*, *b* a *c*.

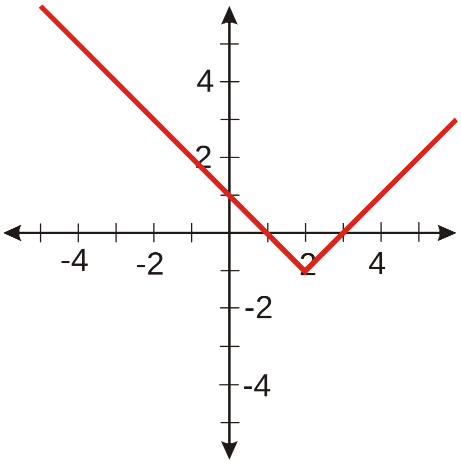
Několik funkcí, jejichž grafy jsme kreslili:



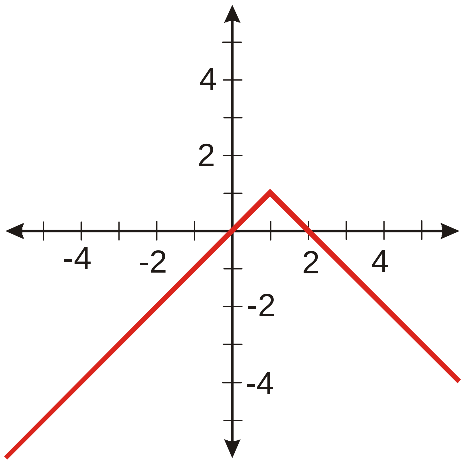
$y = |x-1|$



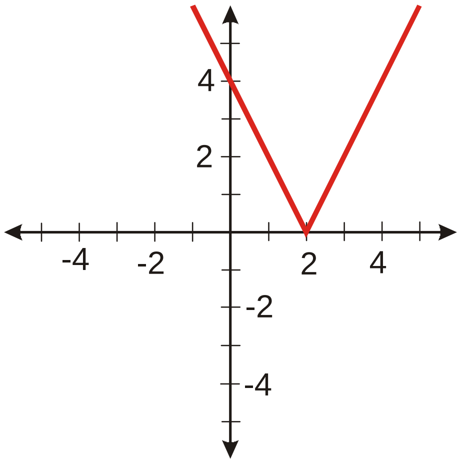
$y = |x|-1$



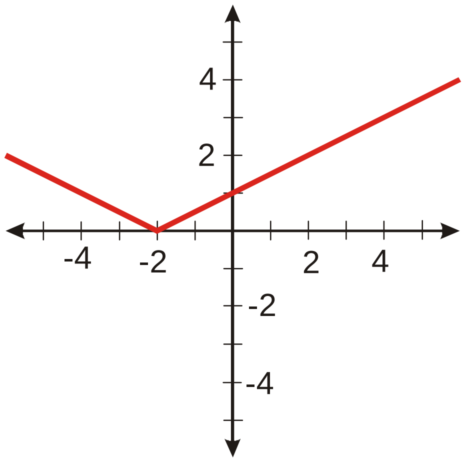
$y = |x-2| - 1$



$y = -|x-1| + 1$



$y = 2|x-2|$



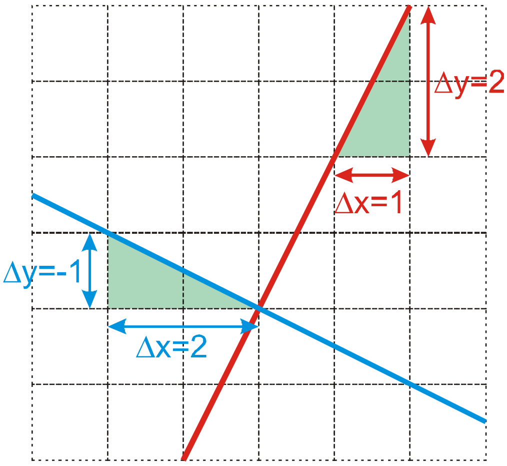
$y = \frac{1}{2}|x+2|$

Z obrázku je vidět, že:
koeficient *a* ovlivňuje šířku písmene V, pokud platí $a < 0$ obrátí graf vzhůru nohama
koeficient *b* posouvá graf funkce ve vodorovném směru
koeficient *c* posouvá graf funkce ve svislém směru

Poznámka: Při posunování grafu absolutní hodnoty stačí sledovat pouze špičku písmena V. Správné posunutí je možné i snadno zkontrolovat, neboť *x*-ová souřadnice získaného bodu musí po dosazení do předpisu vynulovat výraz v absolutní hodnotě, *y*-ová souřadnice pak musí souhlasit s parametrem *c*.

Pedagogická poznámka: Rozhodně nepožaduji po studentech, aby se výsledky předchozího příkladu učili nazpaměť.

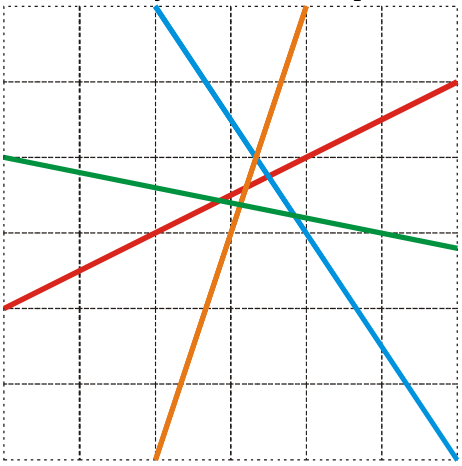
Jak přesně určuje koeficient *a* sevřenost grafu?
Obě ramena absolutní hodnoty jsou částí grafu lineární funkce $\Rightarrow$ *a* funguje stejně jako koeficient *a* v předpisu lineární funkce:

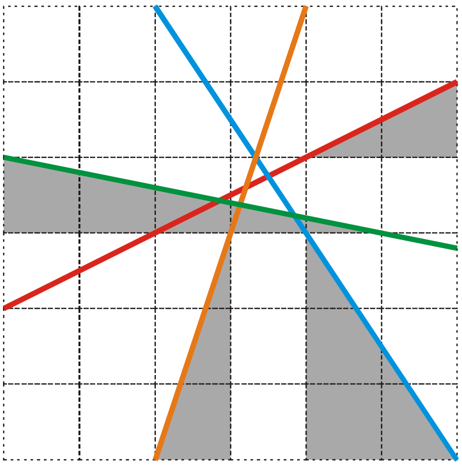


Určíme a pomocí vzorce $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$:

- $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = 2$
- $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{0,5} = -0,5$

Př. 3: Urči hodnoty koeficientu *a* pro následující části lineárních funkcí:





Určíme a pomocí vzorce $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ z vyznačených trojúhelníků:

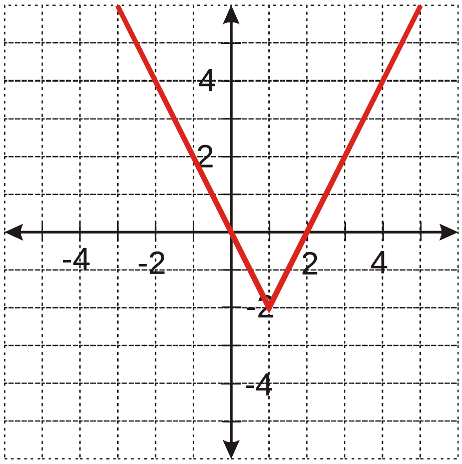
- $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2} = 0,5$
- $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3}{2} = -1,5$
- $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{1} = 3$
- $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{5} = 0,2$

Pedagogická poznámka: Předchozí poznámka s příkladem by logicky patřila do kapitoly o lineárních funkcích. Tam se tato problematika samozřejmě také probírá, ale faktor času zde zřejmě působí, protože na tomto místě je pro studenty daleko stravitelnější a má zřejmě i trvalejší dopad.

Př. 4: Pomocí vlivu konstant *a*, *b*, *c* na tvar grafu funkce $y = a|x-b|+c$ nakresli grafy funkcí: a) $y = 2|x-1|-2$ b) $y = -0,5|x+2|+3$

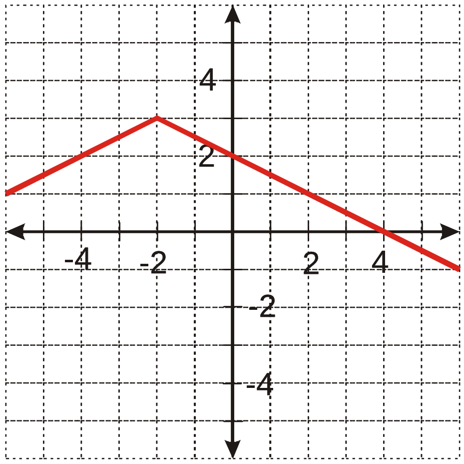
a) $y = 2|x-1|-2$

$a = 2$: graf bude sevřenější (*y* roste dvakrát rychleji)
$b = 1$: graf bude vodorovně posunut o 1 doprava (za *x* musíme dosadit 1, aby se vynuloval vnitřek absolutní hodnoty)
$c = -2$: graf bude ve svislém směru posunutý o dva dolů

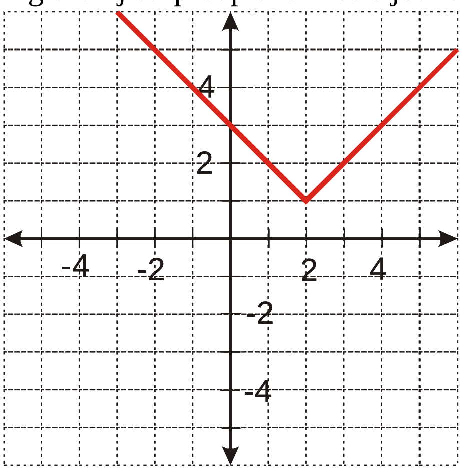


b) $y = -0,5|x+2|+3$

$a = -0,5$: graf bude otevřenější (*y* roste dvakrát pomaleji) a převrácený
$b = -2$: graf bude vodorovně posunut o 2 doleva (za *x* musíme dosadit -2, aby se vynuloval vnitřek absolutní hodnoty)
$c = 3$: graf bude ve svislém směru posunutý o 3 nahoru



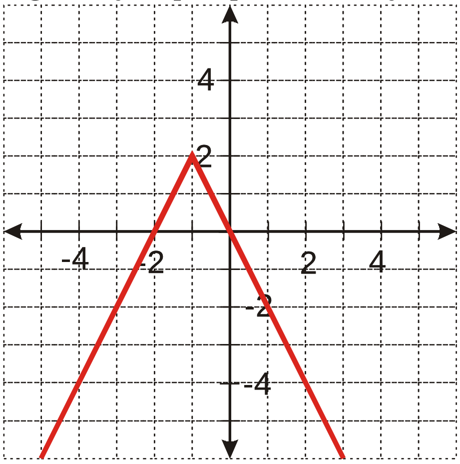
Př. 5: Z grafu zjisti předpis funkce s jednou absolutní hodnotou:



- Hledáme funkci ve tvaru $y = a|x-b|+c$, protože graf má normální orientaci zobáčkem dolů.
- Vrchol grafu má *x*-ovou souřadnici 2 $\Rightarrow$ v absolutní hodnotě je nula pro $x = 2$ $\Rightarrow$ funkce má tvar $y = a|x-2|+c$.
- Vrchol grafu má *y*-ovou souřadnici 1 $\Rightarrow$ graf je posunutý o 1 směrem nahoru $\Rightarrow$ funkce má tvar $y = a|x-2|+1$.

- Graf má standardní šířku (při změně *x* o jedna se změní o jedna i *y*) $\Rightarrow$ funkce má tvar $y = 1|x-2|+1 \Rightarrow y = |x-2|+1$

Př. 6: Z grafu zjisti předpis funkce s jednou absolutní hodnotou:



- Hledáme funkci ve tvaru $y = -a|x-b|+c$, protože graf má normální orientaci zobáčkem dolů.
- Vrchol grafu má *x*-ovou souřadnici -1 $\Rightarrow$ v absolutní hodnotě je nula pro $x = -1$ $\Rightarrow$ funkce má tvar $y = -a|x+1|+c$.
- Vrchol grafu má *y*-ovou souřadnici 2 $\Rightarrow$ graf je posunutý o 2 směrem nahoru $\Rightarrow$ funkce má tvar $y = -a|x+1|+2$.
- Graf je zúžený (při změně *x* o jedna se *y* změní o dva) $\Rightarrow$ funkce má tvar $y = -2|x+1|+2$

Pedagogická poznámka: Fakt, že mezi spočítáním posledního probíraného příklad na obě metody uplynou dvě (čtyři) hodiny, je záměrem. Jde o to, aby si studenti bez tlaku písemky ozkoušeli, co si dokázali z nedávné a dlouho probírané látky zapamatovat (třeba i s pomocí sešitu) a zda to, co si zapamatovali, je opravdu to nejdůležitější a nejpotřebnější k řešení odpovídajících příkladů.
Dalším záměrem následujících příkladů je samozřejmě nácvik výběru nejvhodnější metody. Pokud máte málo času, je lepší se všemi studenty alespoň projít jednotlivé příklady a probrat, jaká metoda řešení je nejvhodnější.

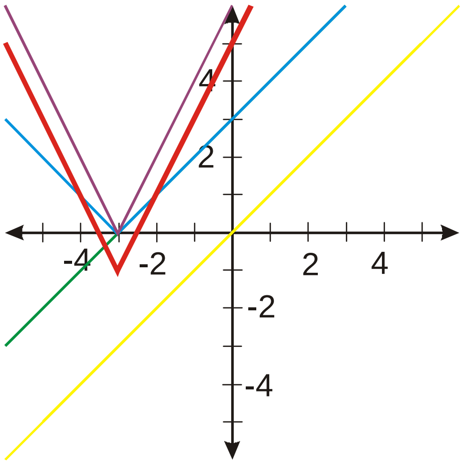
Př. 7: Nejvhodnější metodou nakresli graf funkce $y = 2|x+3|-1$.

V předpisu funkce se vyskytuje neznámá pouze jednou $\Rightarrow$ použijeme metodu napodobení výpočtu (můžeme také nakreslit graf rovnou pomocí významu koeficientů v předpisu $y = a|x-b|+c$).

sled operací:

Nakreslíme funkci $y = x$
Nakreslíme funkci $y = x+3$
Nakreslíme funkci $y = \|x+3\|$
Nakreslíme funkci $y = 2\|x+3\|$

Nakreslíme funkci $y = 2|x+3| - 1$



Př. 8: Nejvhodnější metodou nakresli graf funkce $y = 2|x+1| - x$.

Předpis funkce obsahuje dvakrát neznámou $\Rightarrow$ musíme použít metodu dělení definičního oboru.

Zjistíme nulový bod absolutní hodnoty:

$|x+1|$: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

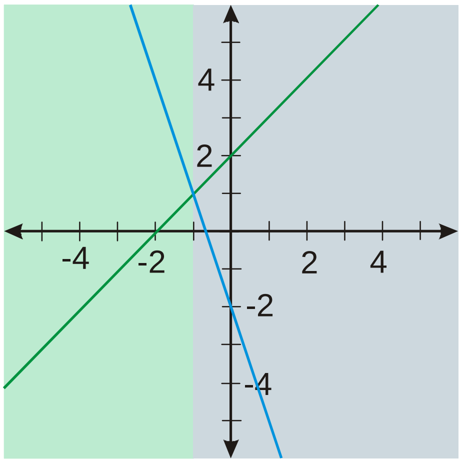
$\Rightarrow$ dva intervaly

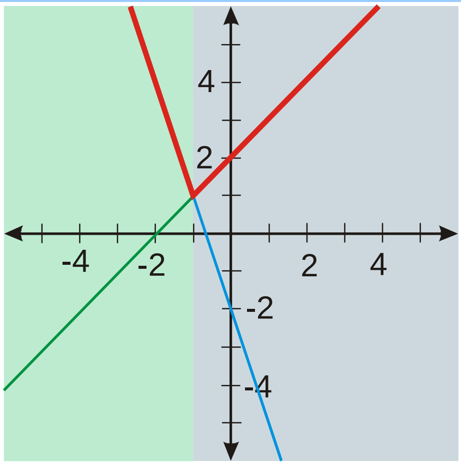
1) $x \in (-\infty;-1\rangle$ $\quad x+1<0 \Rightarrow |x+1| = -x-1$

$y = 2|x+1| - x = 2(-x-1) - x = -3x-2$

2) $x \in \langle -1;\infty)$ $\quad x+1>0 \Rightarrow |x+1| = x+1$

$y = 2|x+1| - x = 2(x+1) - x = x+2$





Př. 9: Nejvhodnější metodou nakresli graf funkce $y = 0,5(|x-2| - 2)$.

V předpisu funkce se vyskytuje neznámá pouze jednou $\Rightarrow$ použijeme metodu napodobení výpočtu.

sled operací:

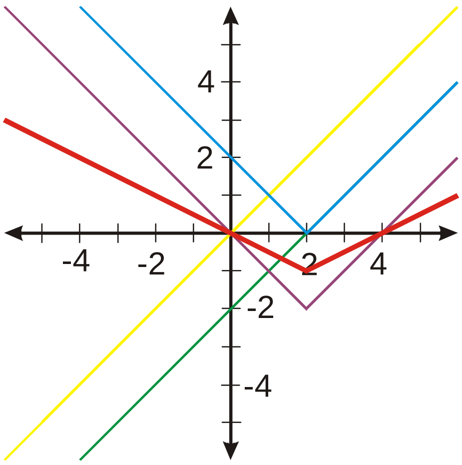
Nakreslíme funkci $y = x$

Nakreslíme funkci $y = x - 2$

Nakreslíme funkci $y = |x - 2|$

Nakreslíme funkci $y = |x - 2| - 2$

Nakreslíme funkci $y = 0,5(|x - 2| - 2)$



Pedagogická poznámka: Pozor předchozí příklad (a také příklad 9) není možné řešit automaticky pomocí pravidel na posunování grafy z příkladu 2. Před jejich použitím je nutné závorku roznásobit. Teprve tehdy se tvar funkce shoduje s předpisem $y = a|x - b| + c$ a je možné posouvat podle pravidel.

Př. 10: Nejvhodnější metodou nakresli graf funkce $y = |2 - x| - (x + 2) - |x| + 4$.

Předpis funkce obsahuje třikrát neznámou $\Rightarrow$ musíme použít metodu dělení definičního oboru.

Zjistíme nulové body jednotlivých absolutních hodnot:

$|2 - x|$: $2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

$|x|$: $x = 0$

$\Rightarrow$ tři intervaly

1) $x \in (-\infty; 0)$ $\quad 2 - x > 0 \Rightarrow |2 - x| = 2 - x$ $\quad x < 0 \Rightarrow |x| = -x$

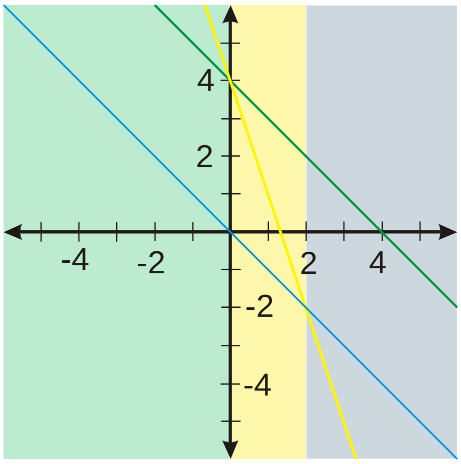
$y = |2 - x| - (x + 2) - |x| + 4 = (2 - x) - (x + 2) - (-x) = -x + 4$

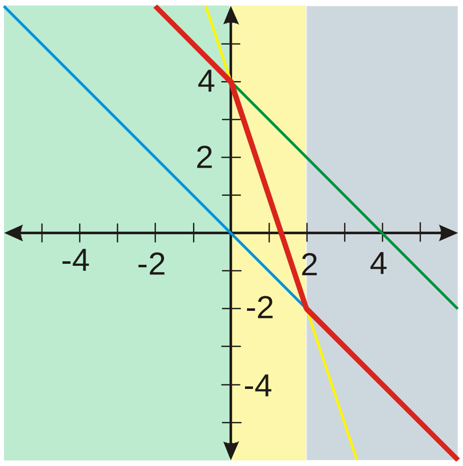
2) $x \in \langle 0; 2 \rangle$ $\quad 2 - x > 0 \Rightarrow |2 - x| = 2 - x$ $\quad x > 0 \Rightarrow |x| = x$

$y = |2 - x| - (x + 2) - |x| + 4 = (2 - x) - (x + 2) - x + 4 = -3x + 4$

3) $x \in (2; \infty)$ $\quad 2 - x < 0 \Rightarrow |2 - x| = -2 + x$ $\quad x > 0 \Rightarrow |x| = x$

$y = |2 - x| - (x + 2) - |x| + 4 = -2 + x - (x + 2) - x = -x$

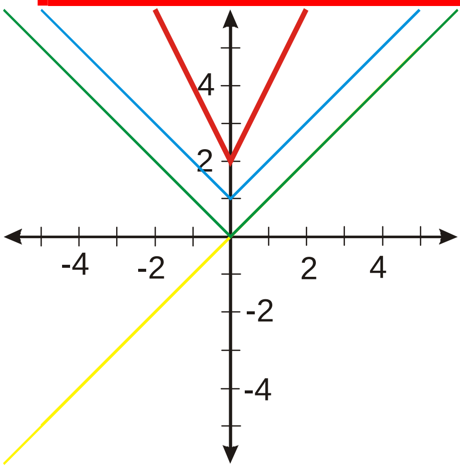




Př. 11: Nejvhodnější metodou nakresli graf funkce $y = 2(|x| + 1)$.

V předpisu funkce se vyskytuje neznámá pouze jednou $\Rightarrow$ použiju metodu napodobení výpočtu.
sled operací:

Nakreslíme funkci $y = x$
Nakreslíme funkci $y = |x|$
Nakreslíme funkci $y = |x| + 1$
Nakreslíme funkci $y = 2(|x| + 1)$



Shrnutí: Už v průběhu výuky je dobré si srovnávat příklady, jejich výsledky a snažit se vybudovat celistvou představu o tom, co se vlastně děje.