2.3.16 Maticový formalismus

Předpoklady: 2315

Pedagogická poznámka: Zápis soustav do matic není uveden ve středoškolských učebnicích. Podle mého názoru je to skoro škoda, vysvětlit ho trvá asi pět minut, dalších deset minut trvá než se s ním studenti sžijí a pak už si jenom užívají pohodlnější počítání, které matice bez neznámých umožňují. Já osobně nijak netrvám na tom, aby jej studenti využívali, mají úplnou možnost volby (kromě této jediné hodiny), jak soustavy počítat, přesto podle mých zkušeností tak polovina studentů u matic zůstane.

Maticový formalismus

Řešení soustav rovnic (3 a více neznámých a rovnic) je možné urychlit maticovým formalismem. Nejde o nový způsob řešení, pouze o zrychlený a přehlednější zápis dosavadních způsobů řešení.

Koeficienty před každou neznámou zapíšu do obdélníkového schématu (matice). Řádky schématu odpovídají jednotlivým rovnicím, sloupce pak jednotlivým neznámým. V našem případě číslo na třetím místě ve druhém řádku odpovídá koeficientu před proměnnou c ve druhé rovnici tedy číslo –1. Pokud daná rovnice proměnnou neobsahuje píšeme nulu.

$$\begin{array}{l} a+b+c+d=8 \\ a-2b-c+2d=4 \\ 2a+b+c+3d=17 \\ 3a+2b-c+d=10 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 17 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 10 \end{array}$$

Úpravy rovnic soustavy pak provádíme na schématu.

1. krok likvidace *a*

$$\begin{array}{ll} & a+b+c+d=8 \\ [\![1]\!]-[\![2]\!] & 3b+2c-d=4 \\ 2\cdot[\![1]\!]-[\![3]\!] & b+c-d=-1 \\ 3\cdot[\![1]\!]-[\![4]\!] & b+4c+2d=14 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{lccccc} & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ [\![1]\!]-[\![2]\!] & 0 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2\cdot[\![1]\!]-[\![3]\!] & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3\cdot[\![1]\!]-[\![4]\!] & 0 & 1 & 4 & 2 & 14 \end{array}$$

Druhou rovnici budeme používat k přičítání v dalším kroku, proto je výhodné prohodit pořadí druhé a třetí rovnice, aby se na druhém místě objevila jednodušší rovnice.

$$\begin{array}{l} a+b+c+d=8 \\ b+c-d=-1 \\ 3b+2c-d=4 \\ b+4c+2d=14 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 14 \end{array}$$

2. krok likvidace *b*

$$\begin{array}{ll} & a+b+c+d=8 \\ & b+c-d=-1 \\ 3\cdot[\![2]\!]-[\![3]\!] & c-2d=-7 \\ [\![4]\!]-[\![2]\!] & 3c+3d=15 \quad /:3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{lcccccl} & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 & \\ & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & \\ 3\cdot[\![2]\!]-[\![3]\!] & 0 & 0 & 1 & -2 & -7 & \\ [\![4]\!]-[\![2]\!] & 0 & 0 & 3 & 3 & 15 & /:3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} a+b+c+d&=8\\ b+c-d&=-1\\ c-2d&=-7\\ c+d&=5 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{ccccc} 1&1&1&1&8\\ 0&1&1&-1&-1\\ 0&0&1&-2&-7\\ 0&0&1&1&5 \end{array}$$

3. krok likvidace *c*

$$\begin{array}{ll} & a+b+c+d=8\\ & b+c-d=-1\\ & c-2d=-7\\ [\![4]\!]-[\![3]\!] & 3d=12 \quad /:3 \end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{lccccc} & 1&1&1&1&8\\ & 0&1&1&-1&-1\\ & 0&0&1&-2&-7\\ [\![4]\!]-[\![3]\!] & 0&0&0&3&12 \quad /:3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} a+b+c+d&=8\\ b+c-d&=-1\\ c-2d&=-7\\ d&=4 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{ccccc} 1&1&1&1&8\\ 0&1&1&-1&-1\\ 0&0&1&-2&-7\\ 0&0&0&1&4 \end{array}$$

Dopočet ostatních proměnných probíhá stejně:

$$c-2d=-7 \Rightarrow c-2\cdot 4=-7 \Rightarrow c=1$$

$$b+c-d=-1 \Rightarrow b+1-4=-1 \Rightarrow b=2$$

$$a+b+c+d=8 \Rightarrow a+2+1+4=8 \Rightarrow a=1$$

$$K=\{[1;2;1;4]\}$$

Př. 1: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{aligned} x+2y-3z&=0\\ 3x-3y+4z&=4\\ 2x-y-3z&=-2 \end{aligned}$. Pro zápis úprav využij matice.

$$\begin{array}{cccc} 1&2&-3&0\\ 3&-3&4&4\\ 2&-1&-3&-2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccc} & 1&2&-3&0\\ 3[\![1]\!]-[\![2]\!] & 0&9&-13&-4\\ 2[\![1]\!]-[\![3]\!] & 0&5&-3&2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccc} & 1&2&-3&0\\ & 0&9&-13&-4\\ 5[\![2]\!]-9[\![3]\!] & 0& &-38&-38 \end{array}$$

$z=1$

dopočítáme y: $9y-13z=-4 \Rightarrow 9y=-4+13\cdot 1=9$

$y=1$

dopočítáme x: $x+2y-3z=0 \Rightarrow x=3z-2y=3\cdot 1-2\cdot 1=1$

$K\{[1;1;1]\}$

Př. 2: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{aligned} a+b+c-d &= 2 \\ a-b-c+d &= 0 \\ a+b-c-2d &= 1 \\ a+2b-c+d &= -3 \end{aligned}$. Pro zápis úprav využij matice.

$$\begin{array}{l|ccccc|l}
 & 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & \\
 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & \\
 & 1 & 1 & -1 & -2 & 1 & \\
 & 1 & 2 & -1 & 1 & -3 & \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & \\
[\![1]\!]-[\![2]\!] & 0 & 2 & 2 & -2 & 2 & /:2 \\
[\![1]\!]-[\![3]\!] & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & \\
[\![1]\!]-[\![4]\!] & 0 & -1 & 2 & -2 & 5 & \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & \\
 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & \\
 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & \\
 & 0 & -1 & 2 & -2 & 5 & \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & \\
 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & \\
 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & \\
[\![2]\!]+[\![4]\!] & 0 & 0 & 3 & -3 & 6 & /:3 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & \\
 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & \\
 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & \\
 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & \\
 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & \\
 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & \\
[\![3]\!]-2[\![4]\!] & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & \\
\hline
\end{array}$$

$3d = -3$

$d = -1$

dopočítáme c: $2c+d = 2c-1 = 1 \Rightarrow 2c = 2$

$c = 1$

dopočítáme b: $b+c-d = 1$

$b+1-(-1) = 1$

$b = -1$

dopočítáme a: $a+b+c-d = 2$

$a+(-1)+1-(-1) = 2$

$a = 1$

$K\{[1;-1;1;-1]\}$

Př. 3: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{aligned} a+2b+c-3d&=-4\\ 2a-b-3c+d&=-2\\ 3a-2b-c-2d&=-11\\ 2a+b+3c-6d&=-13\end{aligned}$. Pro zápis úprav využij matice.

$$\begin{array}{l|ccccc}
 & 1 & 2 & 1 & -3 & -4\\
 & 2 & -1 & -3 & 1 & -2\\
 & 3 & -2 & -1 & -2 & -11\\
 & 2 & 1 & 3 & -6 & -13\\
\hline
 & 1 & 2 & 1 & -3 & -4\\
2[\![1]\!]-[\![2]\!] & 0 & 5 & 5 & -7 & -6\\
3[\![1]\!]-[\![3]\!] & 0 & 8 & 4 & -7 & -1\\
2[\![1]\!]-[\![4]\!] & 0 & 3 & -1 & 0 & 5\\
\hline
 & 1 & 2 & 1 & -3 & -4\\
 & 0 & 5 & 5 & -7 & -6\\
[\![3]\!]-[\![2]\!] & 0 & 3 & -1 & 0 & 5\\
 & 0 & 3 & -1 & 0 & 5\\
\hline
\end{array}$$

3. a 4. rovnice jsou stejné $\Rightarrow$ jednu vynecháme $\Rightarrow$ pro čtyři neznámé máme pouze 3 rovnice $\Rightarrow$ jednu neznámou si volíme ostatní dopočítáváme
volíme $c \in R$ (druhou možností by byla volba *b*, které se také vyskytuje v třetí nejjednodušší rovnici)

$3b-c=5 \Rightarrow b=\frac{5+c}{3}$

2. rovnice:

$5b+5c-7d=-6$

$7d=5b+5c+6$

$7d=5\cdot\frac{5+c}{3}+5c+6=\frac{25+5c+15c+18}{3}$

$d=\frac{43+20c}{21}$

1. rovnice:

$a+2b+c-3d=-4$

$a=3d-4-2b-c$

$a=3\cdot\frac{43+20c}{21}-4-2\cdot\frac{5+c}{3}-c$

$a=\frac{129+60c-84}{21}-\frac{10+2c}{3}-c$

$a=\frac{133+60c-84-70-14c-21c}{21}$

$a=\frac{25c-25}{21}$

$$K\left\{\left[\frac{25c-25}{21};\frac{5+c}{3};c;\frac{43+20c}{21}\right],c\in R\right\}$$

Pedagogická poznámka: Striktní použití Gaussovy eliminační metody by vedlo k řešení trochu pomaleji. Asi nejzajímavějším okamžikem příkladu je volba neznámé pro vyjádření výsledku.

Použití kalkulaček pro výpočet soustav o dvou nebo třech neznámých (a odpovídajícím počtu rovnic)

Většina kalkulaček umí počítat soustavy o dvou a třech neznámých. Následující postup platí pro kalkulačky CASIO (konkrétně typ fx-570MS)

- Tlačítkem MODE přepínáme dokud se na display neobjeví mód pro řešení rovnic EQN
- přepneme do tohoto módu odpovídajícím tlačítkem (v našem případě 1)
- Zvolíme počet neznámých (otázka Unknowns?), v našem případě 3.
- Na display se objeví dotaz na jednotlivé koeficienty soustavy (jako první a_1), zadání koeficientů ukončujeme tlačítkem =.
- Koeficienty se zadávají z následujícího tvaru soustavy:
  $a_1x+b_1y+c_1z=d_1$
  $a_2x+b_2y+c_2z=d_2$
  $a_3x+b_3y+c_3z=d_3$
- Po zadání posledního koeficienty zobrazí kalkulačka kořeny soustavy.

Př. 4: Vyřeš pomocí kalkulačky soustavu rovnic $\begin{array}{l}3x-2y+5z=2\\4x-8y+7z=1\\3x+7y-6z=4\end{array}$.

$$K=\left\{\left[\frac{125}{167};\frac{53}{167};\frac{13}{167}\right]\right\}$$

Př. 5: Vyřeš pomocí kalkulačky soustavu rovnic $\begin{array}{r}4,3x-2,5y+5,3z=7,1\\1,8x-8,4y+7z=11\\3,5x+4,7y-6,2z=3,2\end{array}$.

Pouze přibližné výsledky: $K=\{[1,68;-1,60;-0,78]\}$

Př. 6: Petáková:
strana 16/cvičení 32 a) b)

Shrnutí: Při zápisu do maticového tvaru vynecháváme označení proměnných (*x*, *y*, …), které je jasné z polohy koeficientu v matici.