2.3.7 Lineární rovnice s více neznámými I

Předpoklady: 2201

Pedagogická poznámka: Následující hodinu považuji za velmi důležitou hlavně kvůli pochopení soustav rovnic, které mají více než jedno řešení. Proto je také látka oproti učebnici rozdělena do dvou hodin. Další důležitou věcí je nutnost překonávání bariéry jednoznačnosti, kterou studenti podvědomě vyžadují.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je v případě, že ho studentům zadáte a nebudete vysvětlovat, krásnou ukázkou mentálního bloku podporovaného naším školstvím. Studenti sestaví rovnici (to je jednoznačný úkol) a pak už nic. Začnou padat dotazy: „A jak to máme vyřešit“. „Můžeme to vyřešit z hlavy?“ apod. Když chvilku trváte na tom, že příklad řešení má a že se nemusí ničeho bát, další informace už nedostanou, nakonec z nich řešení uvedená níže získáte.

Př. 1: Najdi všechna taková reálná čísla, aby součet dvojnásobku prvního čísla a trojnásobku druhého čísla byl roven dvanácti.

první číslo x
druhé číslo y

Získáme rovnici: $2x+3y=12$
Žádná další rovnice není, není to jednoznačné, ale neznamená to, že příklad nemá řešení

Můžeme například dosadit čísla:

$x=1,5 \quad y=3 \qquad \Rightarrow \qquad 2x+3y=2\cdot 1,5+3\cdot 3=3+9=12$

$x=0 \quad y=4 \qquad \Rightarrow \qquad 2x+3y=2\cdot 0+3\cdot 4=0+12=12$

$x=3 \quad y=2 \qquad \Rightarrow \qquad 2x+3y=2\cdot 3+3\cdot 2=6+6=12$

$x=6 \quad y=0 \qquad \Rightarrow \qquad 2x+3y=2\cdot 6+3\cdot 0=12+0=12$

dvojce musí být uspořádaná, když prohodíme *x* a *y* nemusí to vyjít
$x=0 \quad y=6$
$2\cdot 0+3\cdot 6=0+18\neq 12$

$\Rightarrow$ **Řešením rovnice se dvěma neznámými je uspořádaná dvojice čísel.**

Dvojic je asi nekonečně mnoho, jak je všechny napsat?

Př. 2: Najdi takové řešení předchozího příkladu, aby platilo $x=1$.

Dosadíme za *x*: $2\cdot 1+3y=12$

$$y=\frac{12-2}{3}$$

$$y=\frac{10}{3}$$

Řešením předchozího příkladu je uspořádaná dvojice čísel $\left[1;\frac{10}{3}\right]$.

Zkusíme to obecně:

$2x+3y=12$

$3y=12-2x$

$y=4-\frac{2}{3}x$

Dokážeme spočítat *y* pro jakékoliv *x* $\Rightarrow$ správných dvojic je nekonečně mnoho.

$K=\left\{\left[x;-\frac{2}{3}x+4\right];x\in R\right\}$

všechny uspořádané dvojice, ve kterých si *x* si vybereme a *y* dopočítáme z vybraného *x* podle vzorce $y=4-\frac{2}{3}x$.

Pedagogická poznámka: Někteří studenti mají trochu problémy, provést postup s jedničkou obecně, ale většinou se jim to nakonec podaří.

Funguje předpis i pro $x=\pi$?

$x=\pi \qquad y=-\frac{2}{3}\pi+4$

Zkouška: $L=2x+3y=12=2\pi+3\left[\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+4\right]=2\pi-2\pi+12=12$

$P=12$

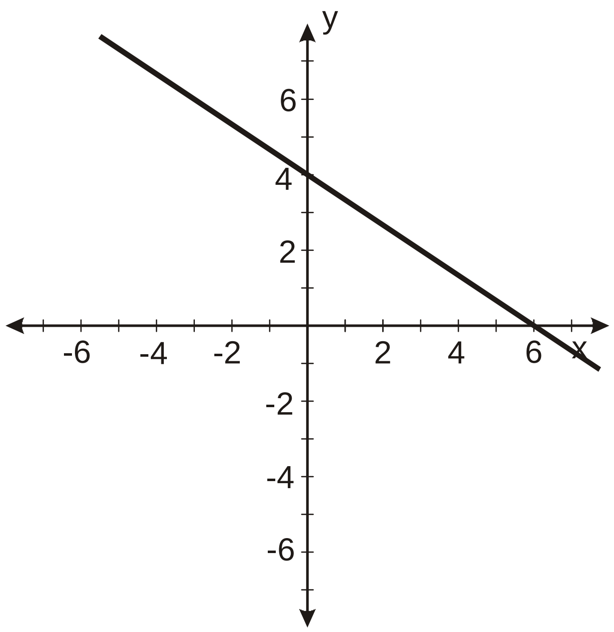
$L=P$

Pedagogická poznámka: Zkouška je samozřejmě zbytečná, ale musíme si uvědomit, že jednak studenti pořád považují rovnici s dvěma neznámými za něco podezřelého a jednak pokud to vyjde pro tak nehezké (ze studentského pohledu) číslo jako je π, studenti snáze přistoupí na to, že to opravdu půjde pro všechna čísla.

Př. 3: Nakresli graficky všechna řešení předchozí rovnice.

$y=-\frac{2}{3}x+4$ - jde o předpis přepis lineární funkce, její body mají souřadnice $[x,y]$

$\Rightarrow$ grafické znázorněním řešení rovnice je graf funkce $y=-\frac{2}{3}x+4$ (s definičním oborem *R*)



Pedagogická poznámka: Docela mě udivila skutečnost, že studenti si pro kreslení grafu znovu počítají dvojice $\left[x, y\right]$ i přesto, že už jich během předchozího počítání sestavili několik. Byli docela překvapení , když jsem jim o té možnosti řekl.

Př. 4: Vyjádři všechna řešení rovnice $2x+3y=12$ tak, aby se při sestavování uspořádaných dvojic volilo číslo *y*.

$$2x+3y=12$$
$$2x=12-3y$$
$$x=\frac{12-3y}{2}$$
$$x=-\frac{3}{2}y+6$$
$$K=\left\{\left[-\frac{3}{2}y+6; y\right] x\in R\right\}$$

Př. 5: Vyjádři všechna řešení rovnice $2x+3y=12$ tak, aby v zápisu množiny všech výsledků nebyl žádný zlomek.

Máme dvě možnosti, jak vyjádřit řešení $K=\left\{\left[x, 4-\frac{2}{3}x\right] x\in R\right\}$ a

$$K=\left\{\left[-\frac{3}{2}y+6; y\right] x\in R\right\}.$$

vezmeme si ***y*** jako dvojnásobek nějakého čísla, aby se dvojky vykrátily $\Rightarrow$ $y=2t$

$$K=\left\{\left[6-\frac{3}{2}2t, 2t\right]; t\in R\right\}$$
$$K=\left\{\left[6-3t, 2t\right]; t\in R\right\}$$

$t=0 \Rightarrow x=6-3t=6-3\cdot 0=6$

$y=2t=2\cdot 0=0$

$[6,0]$

$t=1 \Rightarrow [3,2]$

podobně vyjdeme z $K=\left\{\left[x,4-\frac{2}{3}x\right] x\in R\right\}$

$x=3s$

$K=\{[3s;4-2s];s\in R\}$

Pedagogická poznámka: Objeví se dva způsoby řešení. Kromě substituce, která je správně, se někteří studenti snaží výraz pro popis řešení vynásobit dvěma. Upozorňuji na rozdíl mezi vynásobením (které změní čísla a tím i dvojice, které z předpisu vyjdou) a substitucí, která čísla nemění, jenom mění způsob zápisu.

Množinu všech řešení rovnice $2x+3y=12$ je možné vyjádřit nekonečně mnoha způsoby. Například $K=\left\{\left[x;-\frac{2}{3}x+4\right];x\in R\right\}$ nebo $K=\left\{\left[-\frac{3}{2}y+6;y\right] x\in R\right\}$ nebo $K=\{[6-3t,2t];t\in R\}$ nebo $K=\{[3s;4-2s];s\in R\}$.

Fakt, že rovnice $2x+3y=12$ má jako řešení množinu nekonečně mnoha uspořádaných dvojic čísel, přesně odpovídá naší představě o rovnicích jako omezujících podmínkách, které musí splňovat čísla dosazovaná do proměnných.
Rovnice $2x+3y=12$ znamená jedinou omezující podmínku na dvě možnosti volby $\Rightarrow$ jedna možnost volby je zrušena uplatněním podmínky, ale druhá možnost volby zůstane. Proto má rovnice nekonečně mnoho řešení.

Př. 6: Vyřeš rovnici $2x+y-2=x+3y+3$.

dvě neznámé jedna rovnice $\Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení, zkusíme přes *y*:

$2x+y-2=x+3y+3$

$x-2y-5=0$

$x=2y+5$

$K=\{[2y+5;y];y\in R\}$

Př. 7: Vyřeš rovnici $2x+y-2=x+3y+3$. Pro vyjádření množiny všech řešení zvol opačnou neznámou než v předchozím příkladě.

tentokrát zkusíme přes *x*:

$2x+y-2=x+3y+3$

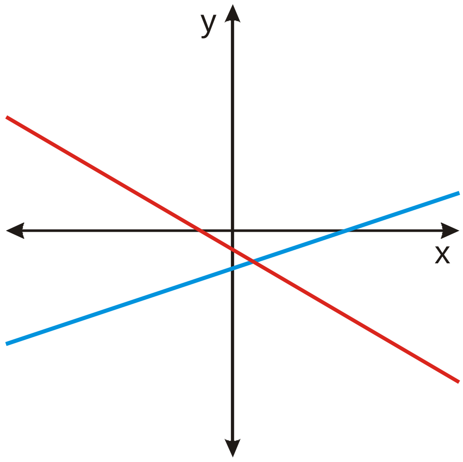
$x-5=2y$

$y=\frac{x-5}{2}$

$K = \left\{ \left[x; \frac{x-5}{2} \right]; x \in R \right\}$

Pedagogická poznámka: U obou předchozích příkladů je třeba dát pozor na zápisy řešení typu $K = \left\{ \left[\frac{x-5}{2}; 2y+5 \right]; y \in R \right\}$ nebo $K = \{[x; 2y+5]; y \in R\}$. Je třeba pohlídat, aby studenti pochopili systém, že hodnotu jedné z proměnných si volí a druhou dopočítávají. Z něj plyne například to, že v zápisu všech řešení se může vyskytovat pouze jediná proměnná.

Př. 8: Která z přímek na obrázku může být grafickým znázorněním všech řešení rovnice $3(x+y) - x + 2 = \sqrt{2}x + y$.



Nejdříve najdeme řešení rovnice $3(x+y) - x + 2 = \sqrt{2}x + y$.

$3x + 3y - x + 2 = \sqrt{2}x + y$

$2y = \sqrt{2}x - 2x - 2$

$y = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) x - 1 \ \Rightarrow \ K = \left\{ \left[x; \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) x - 1 \right]; x \in R \right\}$

funkce, která znázorňuje všechna řešení rovnice je klesající $\Rightarrow$ grafickým znázorněním všech řešení rovnice $3(x+y) - x + 2 = \sqrt{2}x + y$ může být červená přímka.

Shrnutí: Lineární rovnice s dvěma neznámými může mít nekonečně mnoho řešení – uspořádaných dvojic čísel. Množinu řešení získáme například tak, že si jedno z čísel volíme a druhé dopočítáváme.