2.2.5 Nerovnice, úpravy nerovnic

Předpoklady: 2114, 2203

Nerovnice například $2x-3<x+5$ - zápis nerovnosti hodnot dvou výrazů.
$\Rightarrow$ Za *x* můžeme dosazovat různá čísla, tím měníme hodnoty obou výrazů. Hledáme takové *x*, aby nerovnost platila.
Typicky vyjde nekonečně mnoho řešení, interval.

Zkusíme štěstí:
Vyjde nerovnice pro $x=1$?
$2x-3<x+5$
$2\cdot1-3<1+5$
$-1<6$ vyšla $\Rightarrow$ platí $1\in K$

Zkusíme, jestli nerovnice vyjde pro $x=10$.
$2x-3<x+5$
$2\cdot10-3<10+5$
$17<15$ nevyšla $\Rightarrow$ platí $10\notin K$

Takhle bychom mohli zkoušet dosazování do nekonečna.

Jak najít všechna *x*? Zkusíme upravovat jako u rovnic.
$2x-3<x+5 \quad /+3$ Oba výrazy zvětšíme o tři.
$(2x-3)+3<(x+5)+3$
$2x<x+8 \quad /-x$ Od obou výrazů odečteme neznámé číslo *x*.
$(2x)-x<(x+8)-x$
$x<8$ Teď je vidět, že řešením jsou všechny čísla menší než 8.
$K=(-\infty,8)$

Bez úprav bychom nerovnici nevyřešili.
Jaké podmínky musí splňovat úpravy, které můžeme použít?

- Strana, která je menší před úpravou, musí být menší i po úpravě.
- Strana, která je větší před úpravou, musí být větší i po úpravě.

$\Rightarrow$ Úprava nesmí změnit ani rovnost ani nerovnost dvou čísel.

Zkusíme některé úpravy:
Přičtení a odečtení libovolného reálného čísla

$3<5 \quad /+10$	$3<5 \quad /-50$
$3+10<5+10$	$3-50<5-50$
$13<15$	$-47<-45$

Násobení číslem

$3<5 \quad /\cdot 2$	$3<5 \quad /\cdot(-2)$
$(3)\cdot2<(5)\cdot2$	$3\cdot(-2)<5\cdot(-2)$
$6<10$	$-6<-10$ to není pravda !!!!

Pravá nerovnost neplatí. Pokud chceme úpravu provést, musíme i obrátit znaménko.

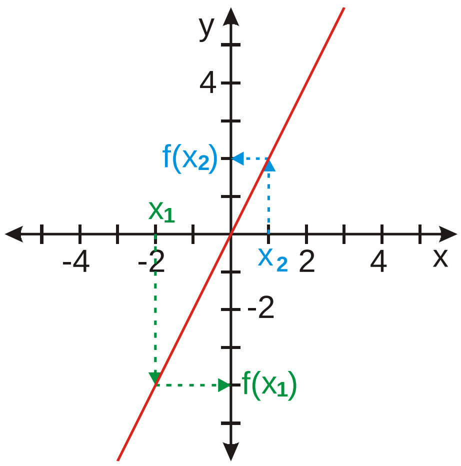
$3 < 5 \quad / \cdot (-2)$ Násobíme a obracíme znaménko.

$3 \cdot (-2) > 5 \cdot (-2)$

$-6 > -10$

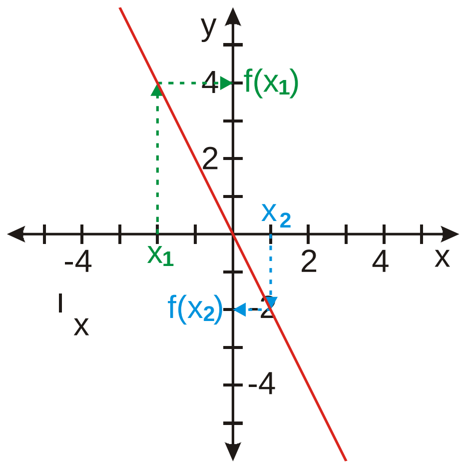
Př. 1: Najdi odpovídající funkce pro úpravy „násobení číslem 2“ a „násobení číslem –2“. Nakresli jejich grafy vedle sebe a zdůvodni, proč při úpravě „násobení číslem –2“ musíme obrátit znaménko nerovnosti.

Úprava „násobení číslem 2“
odpovídající funkce $y = 2x$



Pokud platí $x_1 < x_2$, platí i $f(x_1) < f(x_2)$.
Nerovnost se zachovává
(tedy i stav nerovnice po úpravě).

Úprava „násobení číslem -2“
odpovídající funkce $y = -2x$



Pokud platí $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) > f(x_2)$.
Nerovnost se obrací
(tedy i stav nerovnice po úpravě).

Př. 2: Rozhodni, která vlastnost odpovídající funkce rozhoduje o tom, zda provedení úpravy na nerovnici vyžaduje obrácení nerovnosti.

- Pokud je odpovídající funkce rostoucí, úprava zachovává nerovnost a znaménko nerovnosti se zachovává.
- Pokud je odpovídající funkce klesající, úprava obrací nerovnost a znaménko nerovnosti se obrací.

Zkusíme další úpravy:
Přičtení neznámé
Neznámá je žolík za libovolné číslo + můžeme přičíst i odečíst jakékoliv číslo $\Rightarrow$ můžeme přičítat i neznámou.

Vynásobení nerovnice neznámou

$\frac{1}{x} \geq 1 \quad / \cdot x$ Pokud je x žolík za kladné číslo, neobracíme znaménko.

$1 \geq x$

$\frac{1}{x} \geq 1 \quad /\cdot x$ Pokud je x žolík za záporné číslo, obracíme znaménko.

$1 \leq x$

$\Rightarrow$ Obojí je správně, ale jenom pro část čísel $\Rightarrow$ nemůžeme to udělat najednou.

Musíme řešit nerovnici nadvakrát.

$\frac{1}{x} \geq 1 \quad /\cdot x$

1. bereme jenom ty hodnoty *x*, pro které je číslo, kterým násobíme, kladné.	**2. bereme jenom ty hodnoty *x*, pro které je číslo, kterým násobíme, záporné.**
$x > 0$ $\frac{1}{x} \geq 1 \quad /\cdot x$ $1 \geq x$ $K_1 = \left(0;1\right\rangle$ V nerovnici vyšla všechna čísla menší než 1, ale my jsme počítali jenom s těmi, která jsou větší než nula.	$x < 0$ $\frac{1}{x} \geq 1 \quad /\cdot x$ - násobíme záporným číslem $\Rightarrow$ obracíme znaménko $1 \leq x$ $K_2 = \emptyset$ V nerovnici vyšla všechna čísla větší než 1, ale my jsme počítali jenom s těmi, která jsou menší než nula. Oběma podmínkám nevyhovuje žádné číslo.

Do řešení nerovnice zahrneme řešení z obou cest: $K = K_1 \cup K_2 = \left(0;1\right\rangle \cup \emptyset = \left(0;1\right\rangle$.

Pedagogická poznámka: Když probírám látku já, nepoužívám na řešení příkladu $\frac{1}{x} \geq 1$ počítač, ale řeším ho na tabuli. Nechávám studenty napsat samostatně K_1 (dopočítám k řádku $1 \geq x$, ale množinu řešení píší studenti sami. Poté diskutujeme o tom, proč ho mají téměř všichni špatně) a poté i celý postup pro $x < 0$.
Jinak tento příklad můžete použít jako krásnou demonstraci neúčinnost klasického vysvětlování bez neustálého kontrolování zadáváním příkladů. Pokud příklad spočítáte sami, budou se studenti tvářit, že na tom nic není. Jakmile jim dáte spočítat podobný, nezvládne ho skoro nikdo.
Protože rozdělení příkladu na dva je v matematice poměrně častou metodou, vracíme se k těmto příkladům už v hodině 2208 a pak ještě několikrát.

Při řešení nerovnic můžeme používat následující úpravy:

1) <u>ekvivalentní jednoduché</u>

- **přičítání (odčítání) reálných čísel,**
- **přičítání (odčítání) výrazů s neznámou**
- **násobení a dělení kladnými čísly**

2)<u>ekvivalentní s obrácením znaménka</u>

- **násobení a dělení zápornými čísly**

3)<u>ekvivalentní složité</u>

- **násobení a dělení výrazem s neznámou (musíme zjistit, zda je výraz kladný nebo záporný a pokud může být obojí, musíme výpočet rozdělit)**

Pedagogická poznámka: Na řešení následujících příkladů je potřeba minimálně 10 minut. Pokud je málo času přeskočte souhrnný zápis úprav výše a nechte studenty počítat.

Př. 3: Vyřeš nerovnici $5(x+1)<2x-4$.

$5(x+1)<2x-4$

$5x+5<2x-4$

$3x<-9 \quad /:3$ Dělíme kladným číslem, neobracíme znaménko nerovnosti.

$x<-3$ $\quad K=(-\infty;-3)$

Př. 4: Vyřeš nerovnici $5(x+1)<2x-4$. Výrazy s x převeď na pravou stranu.

$5(x+1)<2x-4$

$5x+5<2x-4$

$9<-3x \quad /:(-3)$ Dělíme záporným číslem, obracíme znaménko nerovnosti.

$-3>x$ $\quad K=(-\infty;-3)$

Kdybychom u předchozího příkladu neobrátili znaménko, nerovnice by nevyšla stejně jako u prvního řešení $\Rightarrow$ další důkaz, že obracení znaménka není žádný výmysl, ale nutnost.

Pedagogická poznámka: Vyřešení nerovnice oběma způsoby považuji za důležité, protože z něj je vidět, že obracení znaménka není žádnou vymyšleností, ale nutností, která pouze zachycuje logiku světa. Zvýraznění účelu je podle mě důležité, protože studenti mají tendenci vnímat téměř všechno ve škole jako bezúčelné.
U slabších studentů je dobré zkontrolovat v sešitě i postup. Mnozí v případě, kdy ví, jaké má příklad řešení, řešení opíšou a vůbec si nevšimnou, že jim vyšlo něco úplně jiného (třeba $-3<x$).

Př. 5: Vyřeš nerovnici: $x\sqrt{2}+1>\sqrt{3}+x$.

$x\sqrt{2}+1>\sqrt{3}+x$

$x\sqrt{2}-x>\sqrt{3}-1$

$x\left(\sqrt{2}-1\right)>\sqrt{3}-1$ Dělíme číslem $\left(\sqrt{2}-1\right)$, které je kladné $\Rightarrow$ neobracíme nerovnost.

$x\left(\sqrt{2}-1\right)>\sqrt{3}-1 \quad /:\left(\sqrt{2}-1\right)$

$$x>\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}{2-1}=\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-1$$

$K=\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-1;\infty\right)$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je důležitý z hlediska zapamatovávání. Hlavním problémem je vytýkání *x* před závorku. Stejný problém řešili studenti před dvěma hodinami, a pokud si to již nepamatují, je to špatné. Zkouším jim to vysvětlit.

Př. 6: Vyřeš nerovnici: $3x-1\le 5+\pi x$.

$3x-1\le 5+\pi x$

$3x-\pi x\le 6$

$x(3-\pi)\le 6$ Dělíme číslem $(3-\pi)$, které je záporné $\Rightarrow$ obracíme nerovnost.

$x(3-\pi)\le 6 \quad / :(3-\pi)$

$x\ge \dfrac{6}{3-\pi}$ $\qquad K=\left\langle \dfrac{6}{3-\pi};\infty\right)$

Poznámka: Stejné řešení získáme, i když se vyhneme dělení záporným číslem:

$3x-1\le 5+\pi x$

$-6\le \pi x-3x$

$-6\le x(\pi-3)$ Dělíme číslem $(\pi-3)$, které je kladné $\Rightarrow$ nerovnost neobracíme.

$-6\le x(\pi-3) \quad / :(\pi-3)$

$\dfrac{-6}{\pi-3}=\dfrac{6}{3-\pi}\le x$ $\qquad K=\left\langle \dfrac{6}{3-\pi};\infty\right)$

Př. 7: Petáková:
strana 12/cvičení 1 f) g)

Shrnutí: Při úpravách nerovnic musíme být opatrnější než při úpravách rovnic, například při násobení záporným číslem musíme obrátit nerovnost.