2.2.1 Lineární rovnice I

Předpoklady: 2202

Lineární rovnice jsou všechny rovnice, které můžeme zapsat ve tvaru $ax+b=0$ (neznámá je pouze v první mocnině).

Podobnost:

Lineární rovnice $ax+b=0$

Hledáme, kdy se výraz $ax+b$ na pravé straně rovná nule.

Řešíme rovnici:

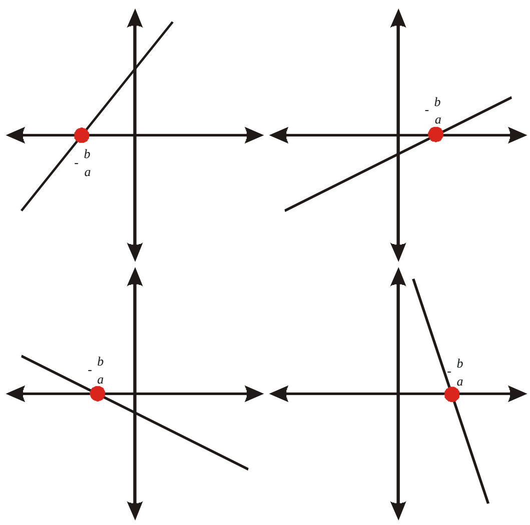
$ax+b=0 \quad / -b$ Odečítat můžeme cokoliv.

$ax=-b \quad /$ Chceme dělit číslem a. Jde to jednom, když $a \neq 0 \Rightarrow$ musíme rozdělit postup do několika částí.

Lineární funkce $y=ax+b$

Hledáme, kdy $y=0 \Rightarrow$ hledáme průsečík s osou x.

Grafy lineárních funkcí $y=ax+b$, $a \neq 0$



Ve všech případech mají právě jeden průsečík s osou x.

1. Předpoklad $a \neq 0 \Rightarrow$ rovnici můžeme vydělit a.

$ax=-b \quad / : a$

$$x=-\frac{b}{a}$$

Jediné řešení $K=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

2. Pokračujeme v řešení $a=0$. Nemůžeme rovnici vydělit, ale víme, které konkrétní a nás zajímá $\Rightarrow$ můžeme ho dosadit.

$$0 \cdot x=-b$$

Výsledek záleží na hodnotě b.

$a=0 \Rightarrow$ konstantní funkce $y=0x+b=b$

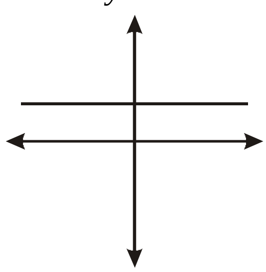
2. a)

$0x=-b$

Je-li $b \neq 0$, rovnice nemá řešení.

$K=\emptyset$

Funkce $y=b \quad b \neq 0$



Žádný průsečík s osou x.

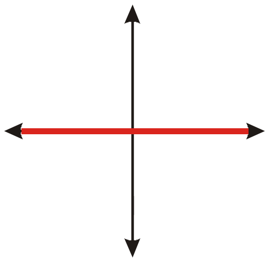
2. b)

$0x = -b$

Je-li $b = 0$, řešením rovnice jsou všechna reálná čísla.

$K = R$

Funkce $y = 0$



Každý bod osy x je průsečíkem s grafem funkce $y = 0$.

Pedagogická poznámka: Levý slupce tabulky vytvářím na tabuli, pravý sloupec tabulky vyplňují studenti sami. Sestavení tabulky je určitě důležité, ale nemělo by trvat déle než 15 minut, aby zbyl čas napočítání.

Postup ve zbytku hodiny je třeba rozvrhnout tak, aby zbylo alespoň deset minut na příklady 3 a 4.

Př. 1: Vyřeš rovnice:

a) $3(2x+5)+15 = x+85$

b) $2(2x+1)-(1-x) = 5(x+3)$

c) $(x-2)^2+(x+1)^2 = (2x+3)(x-1)$

d) $4(x+3)^2-(2x+1)^2 = 4(5x+8)+3$

e) $(3x+1)^2+(4x+1)^2 = (5x+1)^2+1$

a) $3(2x+5)+15 = x+85$

$6x+15+15 = x+85$

$6x+30 = x+85$

$5x = 55$

$x = 11$ $K = \{11\}$

b) $2(2x+1)-(1-x) = 5(x+3)$

$4x+2-1+x = 5x+15$

$0x = 14$ $K = \{\varnothing\}$

c)

$(x-2)^2+(x+1)^2 = (2x+3)(x-1)$

$x^2-4x+4+x^2+2x+1 = 2x^2-2x+3x-3$

$-3x = -8$

$x = \frac{8}{3}$ $K = \left\{\frac{8}{3}\right\}$

d)

$4(x+3)^2-(2x+1)^2 = 4(5x+8)+3$

$4\left(x^2+6x+9\right)-\left(4x^2+4x+1\right) = 20x+32+3$

$4x^2+24x+36-4x^2-4x-1 = 20x+35$

$20x+35 = 20x+35$

$0x = 0$ $K = R$

e)

$(3x+1)^2+(4x+1)^2 = (5x+1)^2+1$

$9x^2+6x+1+16x^2+8x+1 = 25x^2+10x+1+1$

$25x^2+14x+2 = 25x^2+10x+2$

$4x = 0$

$x = 0$ $K = \{0\}$

Pedagogická poznámka: Je nutné, aby studenti sami zapsali množinu všech řešení K pro příklady b) a d). Často se ukazuje, že sice dojdou k výsledku $0x = 14$, ale neví, co

to znamená. Bude samozřejmě lepší, když ke správnému výsledku dojdou úvahou, než když se budou koukat do předchozí tabulky.
Příklady c) d) e) vyžadují umocňování dvojčlenu. Po delší přestávce je pro mnohé překvapením, že neplatí $(x+1)^2 = x^2+1$. Tuhle chybu se snažím tvrdě trestat.
Když se umocňování probírá upozorňuji studenty, že předchozí chyba je častá, ale velmi vážná. To, že ji někdo udělá znova, je důkazem, že se nesnaží o trvalé zapamatování. Bez trvalého zapamatování základních poznatků, ale není možné seriózní vzdělání v jakémkoliv oboru, proto se snažím studentům dokázat, že je i v jejich zájmu si takové věci pamatovat a příště nedělat podobné chyby.
Příklad e) je trochu chyták. Téměř vždy se najde někdo, kdo napíše $x=0$ $K=\emptyset$. Jakoby nula nemohla být řešením rovnice a byla nějakým méněcenným číslem.

Př. 2: Vyřeš rovnice:
a) $\pi x+3=4$ b) $0,83t+32=160$
c) $2x\sqrt{3}-7=0$ d) $3y+2=2\sqrt{3}$

a) $\pi x+3=4$
$\pi x=1$
$x=\frac{1}{\pi}$ $K=\left\{\frac{1}{\pi}\right\}$

b) $0,83t+32=160$
$0,83t=128$
$t=\frac{128}{0,83}=\frac{12800}{83}=154\frac{18}{83}$ $K=\left\{154\frac{18}{83}\right\}$

c) $2x\sqrt{3}-7=0$
$x\left(2\sqrt{3}\right)=7$
$x=\frac{7}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{6}$ $K=\left\{\frac{7\sqrt{3}}{6}\right\}$

d) $3y+2=2\sqrt{3}$
$3y=2\sqrt{3}-2$
$y=\frac{2\sqrt{3}-2}{3}$ $K=\left\{\frac{2\sqrt{3}-2}{3}\right\}$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklady jsou uvedeny víceméně jenom kvůli tomu, aby si studenti ověřili, že odmocniny (desetinná čísla nebo číslo π) jsou stejná čísla jako cokoliv jiného. Někteří mají totiž tendenci vyjadřovat místo neznámé odmocninu.

Př. 3: Vyřeš rovnice:
a) $x\sqrt{2}-\sqrt{3}=\sqrt{3}-x$ b) $\sqrt{2}\left(x-1\right)=\sqrt{3}-2x$

a) $x\sqrt{2}-\sqrt{3}=\sqrt{3}-x$
$x+x\sqrt{2}=2\sqrt{3}$
$x(1+\sqrt{2})=2\sqrt{3}$
$x=\frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$
$x=\frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}\cdot\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{1-2}=\frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{-1}=2\sqrt{6}-2\sqrt{3}$ $K=\left\{2\sqrt{6}-2\sqrt{3}\right\}$

Zkouška:

$L:\left(2\sqrt{6}-2\sqrt{3}\right)\sqrt{2}-\sqrt{3}=\sqrt{3}-2\sqrt{6}+2\sqrt{3}+2\sqrt{12}-2\sqrt{6}-\sqrt{3}=4\sqrt{3}-2\sqrt{6}-\sqrt{3}=3\sqrt{3}-2\sqrt{6}$

$P:\sqrt{3}-2\sqrt{6}+2\sqrt{3}=3\sqrt{3}-2\sqrt{6}$

$L=P$

b) $\sqrt{2}(x-1)=\sqrt{3}-2x$

$\sqrt{2}x-\sqrt{2}=\sqrt{3}-2x$

$x\left(\sqrt{2}+2\right)=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$$x=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2}\cdot\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}-2}$$

$$x=\frac{\sqrt{6}+2-2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2-4}=\frac{\sqrt{6}+2-2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{-2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}-1-\frac{\sqrt{6}}{2} \qquad K=\left\{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1-\frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$$

Pedagogická poznámka: Příklad a) spočítá samostatně jen velmi málo studentů. Většinou postupují takto:

$x+x\sqrt{2}=2\sqrt{3} \qquad /:\sqrt{2}$

$$x+x=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Studenti vydělí odmocninou pouze tu část levé strany, která ji obsahuje (kdyby to neudělali, tak by se jí nezbavili). Připomínám, že základním principem úprav rovnic, je stejný přístup k oběma číslům rovnosti, tedy k celým stranám. Tento princip není možné porušit. Naopak dodržování základních principů, nám umožňuje postup, i v případě, kdy si nejsme jistí.

Př. 4: Na základě postupu u předchozích příkladů sestav obecný návod, jak řešit lineární rovnice.

Obecný návod:

1. Roznásobíme všechny závorky.
2. Na jednu stranu dáme výrazy s x, na druhou dáme zbytek.
3. Vydělíme (pokud je to nutné, nejdříve vytkneme x před závorku a pak závorkou vydělíme).

Shrnutí: Pokud nemůžeme všechny výrazy s *x* normálně sečíst, převedeme je na jednu stranu a *x* vytkneme.