1.9.1 Vyjádření neznámé ze vzorce I

Předpoklady: 1705, 1805

Pedagogická poznámka: Ačkoliv v normální učebnici zabírá vyjadřování ze vzorce jenom tři stránky, věnoval jsem ji celou podkapitolu, z několika důvodů:

Autor je sám spíše fyzikářem a jeho zkušenosti ukazují, že pouze schopnost bezproblémové úpravy výrazů dává studentům možnost zabývat se při fyzice fyzikou a ne neustálým rozšifrováváním záhadných přesunů písmenek ve vzorcích.

Základní postup při vyjadřování (shodná úprava obou stran) je základním kamenem řešení rovnic, které v učebnici matematiky následuje a tvoří její veledůležitou část.

Při vyjadřování velmi záleží na pořadí jednotlivých matematických operací a správném chápání toho, které části výrazů v rovnicích tvoří „číslo", se kterým je možné něco dělat. Je sice pravda, že to všechno by studenti měli znát ze základní školy, ale faktem je, že mnozí studenti to prostě neznají a je lepší to vzít na vědomí, než se vymlouvat, že je to měl naučit někdo jiný.

Pro vyjadřování ze vzorce stačí jediné pravidlo „s oběma stranami děláme to samé". Při případných chybách se v naprosté většině případů dá snadno ukázat jeho porušení. Studenti se tak učí, že je možné se dostat daleko s dodržováním pravidel a ve chvílích nejistoty je třeba být v jejich uplatňování co nejdůslednější.

Je nutné trvat (ve shodě s fyzikářem) na tom, že:

studenti se nebudou učit úpravy vzorců ani konečné výsledky s výjimkou základních vztahů (a věřte, že to studenti často dělají, mají pak na paměťové zapamatování nezvládnutelné množství údajů)

studenti nebudou používat „pomocné postupy ala trojúhelníčky na součinové vzorce" (bohužel jsou jimi často vybaveni ze ZŠ, všechny tyto postupy jenom upevňují představy matematiky jako nepochopitelného předmětu, studenti je bez obav používají i mimo oblast jejich platnosti)

studenti budou vždy vycházet ze základního pravidla uvedeného v článku níže v červeném rámečku.

Jak je ještě jednou uvedeno dále, při vyjadřování ze vzorců je zcela zásadní, zda mají studenti alespoň základní znalosti o prioritách operací a úpravách rovnic. Pokud studenti tyto znalosti nemají (a to je bohužel u studentů, kteří přicházejí ze základních škol stále častější), je nutné postup ještě více zpomalit, rychlejším nechat počítat příklady se sbírky a látku uvedenou ve dvou hodinách rozdělit do tří. Určitě to není ztráta času, vyplatí se Vám to při probírání rovnic a studentům při fyzice.

Pedagogická poznámka: Pro mě je nedílnou součástí hodin o vyjádření neznámé ze vzorce sbírka příkladů. Vždy něco spočítáme společně, pak nechám studenty počítat samostatně a sleduji zda ti, kteří měli předtím problémy, neopakují stejné chyby.

Vzorec pro dráhu rovnoměrného pohybu $s = v \cdot t$. Jak najít vzorec pro rychlost?

Chceme vzorec $v = ...$, na pravé straně rovnice nám u *v* vadí, že je vynásobené *t*. Toho se zbavíme, když pravou stranu vydělíme *t*. Vzorec je rovnice (rovnost dvou čísel), kdybychom jedno (pravou stranu) vydělili *t* a druhé (levou stranu) ne, rovnost by se mohla ztratit.
$\Rightarrow$ abychom ji zachovali musíme i s levou udělat to samé – vydělit *t*.

$s = v \cdot t \quad / : t$

$\frac{s}{t} = \frac{v \cdot t}{t}$

$\frac{s}{t} = v$

Výsledný vzorec je logický, čím ujedeme delší vzdálenost, za kratší čas, tím jsme jeli větší rychlostí.
Možnost kontroly je jedním z největších výhod obecného odvozování vzorců.

Vzorec pro *t*?

$s = v \cdot t \quad / : v$

$\frac{s}{v} = \frac{v \cdot t}{v}$

$\frac{s}{v} = t$ Čím větší vzdálenost máme ujet, tím delší dobu to bude trvat. Čím rychleji pojedeme, tím kratší doba bude potřeba.

Při vyjadřování neznámé ze vzorce, vycházíme z toho, že vzorce mají tvar matematické rovnice $\Rightarrow$ abychom zachovali rovnost obou stran rovnice, každou úpravu, kterou provedeme s jednou stranou rovnice, musíme provést i s druhou stranou.

Ještě než se pustíme do příkladů, musíme si zopakovat priority operací, které při výpočtech používáme. Pořadí operací (například ve výrazu: $3 \cdot a^2 + 4$):

- umocňování - a^2
- násobení, dělení - $3 \cdot a^2$
- sčítání, odčítání - $3 \cdot a^2 + 4$

Pořadí mohou změnit závorky.
Když se budeme snažit vypočítat proměnnou ze vztahu, budeme od ní postupně oddělovat jednotlivé operace v opačném pořadí (sčítání – násobení – umocňování) = nejdříve odebíráme operace, které jsou k naší proměnné nejdál, nejméně k přiléhají (je to úplně stejné, jako když balíme dárky. Nejblíže dárku je krabice, pak je papír a nejdále provázek. Pokud chceme dárek rozbalit, musíme nejdříve rozvázat provázek, pak rozbalit papír a nakonec otevřít krabici).

Pedagogická poznámka: Opakování priority matematických operací není úplně zbytečné. Jednak v jeho rámci zmiňujeme návod na obecný postup při úpravě operací, jednak se opravdu občas najde někdo, kdo priority neumí. Daleko větší je pak počet těch, kteří si priority operací sice pamatují, ale při samostatných výpočtech postupují zcela bez ohledu na ně (a ty je potřeba při výpočtech hlídat). Jinak jde o krásnou ukázku toho, že klasicky naučené pravidlo ještě neznamená schopnost podle něj ve skutečnosti postupovat.

Př. 1: Ze vzorce pro velikost magnetické indukce $B=\mu\frac{NI}{l}$ vyjádři počet závitů cívky *N*.

$$B=\mu\frac{NI}{l} \quad /\cdot l$$
$$Bl=\mu NI \quad /:\mu I$$
$$\frac{Bl}{\mu I}=N$$

Pedagogická poznámka: U studentů, kteří nemají moc ponětí o matematických operací se objevuje následující chyba: $B=\mu\frac{NI}{l} \quad /\cdot l$

$Bl=\mu l\cdot NI$. Studenti násobí číslem *l* jak zlomek na pravé straně tak konstantu μ, je nutné jim ukázat, že celá pravá strana $\mu\frac{NI}{l}$ je jedno číslo, které jsme vynásobili číslem *l*.

Př. 2: Najdi chybu v následujícím postupu:

$$B=\mu\frac{NI}{l} \quad /\cdot l$$
$$Bl=\mu NI \quad /:\mu$$
$$\frac{Bl}{\mu}=NI \quad /:I$$
$$N=\frac{Bl}{\frac{\mu}{I}}=\frac{Bl}{1}\cdot\frac{I}{\mu}=\frac{BlI}{\mu}$$

V uvedeném řešení jsou dvě „chyby“:
1. taktická chyba (= nepoužití ideálního postupu, nemusí vést k chybě, ale komplikuje řešení): na druhém řádku jsme měli rovnou dělit $Bl=\mu NI \quad /:\mu I$

2. faktická chyba (= porušení matematických pravidel, nutně vedoucí ke špatnému výsledku)
Chyba vznikla při druhém dělení $\frac{Bl}{\mu}=NI \quad /:I$, kde jsme špatně napsali hlavní zlomkovou čáru vzniklého zlomku. Správný postup: $N=\frac{\frac{Bl}{\mu}}{I}=\frac{Bl}{\mu}\cdot\frac{1}{I}=\frac{Bl}{\mu I}$

Faktickou chybu jsme mohli snadno odhalit. Proměnné μ a I jsou v počátečním vzorci ve stejné roli (v součinu s proměnnou *N*) $\Rightarrow$ ve výsledném vzorci by obě proměnné měli opět hrát stejnou roli. Tento požadavek splňuje správný výsledek (obě proměnné dělí součin Bl), ale špatný výsledek tento požadavek nesplňuje (*I* součin Bl násobí a μ součin Bl dělí).

Př. 3: Ze vzorce pro zvětšení mikroskopu $\frac{\tau'}{\tau}=\frac{\Delta}{f_1}\frac{d}{f_2}$ vyjádři ohniskovou vzdálenost objektivu f_1.

Úvaha: Vyrábíme vztah $f_1 =$ $\Rightarrow$ musíme „dostat f_1 nahoru“ $\Rightarrow$ musíme vynásobit rovnici číslem f_1. Pak se budeme muset ještě zbavit čísla τ $\Rightarrow$ vynásobíme si vztah výrazem $f_1 f_2 \tau$, tím odstraníme všechny zlomky a pak snadno vyjádříme libovolnou veličinu.

$$\frac{\tau'}{\tau}=\frac{\Delta}{f_1}\frac{d}{f_2} \quad / \cdot f_1 f_2 \tau$$

$$f_1 f_2 \tau' = \Delta d \tau \quad / : f_2 \tau'$$

$$f_1 = \frac{\Delta d \tau}{f_2 \tau'}$$

Př. 4: Sbírka příklad 1.

Př. 5: Ze vzorce pro objem kužele $V=\frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot v$ vyjádři výšku *v* a poloměr podstavy *r*.

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 v \quad / \cdot 3$$

$$3V=\pi r^2 v \quad / : \pi r^2$$

$$v=\frac{3V}{\pi r^2}$$

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 v \quad / \cdot 3$$

$$3V=\pi r^2 v \quad / : \pi v$$

$$\frac{3V}{\pi v}=r^2 \quad / \sqrt{\ }$$

$$r=\sqrt{\frac{3V}{\pi v}}$$

Pedagogická poznámka: Někteří studenti postupují „na jeden zátah“ a získají výsledek $v=\frac{V}{\frac{1}{3}\pi r^2}$. Pokud tvrdí, že jde o stejně dobrý výsledek jako $v=\frac{3V}{\pi r^2}$, chci po nich, aby zkusili svůj a můj výraz naťukat do kalkulačky.
Několikrát jsem se setkal s tím, že studenti při vyjadřování poloměru vzorec nejdříve odmocnili (někdy dokázali i takto dojít ke správnému výsledku) . V takovém případě se vracíme k prioritám a operací a k tomu, co je nejvýhodnější odklízet nejdříve.

Př. 6: Sbírka příklad 2.

Př. 7: Ze vzorce zrychlení rovnoměrně zrychleného pohybu $a=\frac{v-v_0}{t}$ vyjádři počáteční rychlost v_0.

$$a=\frac{v-v_0}{t} \qquad /\cdot t$$
$$at=v-v_0 \qquad /+v_0-at$$
$$v_0=v-at$$

jiná možnost:

$$a=\frac{v-v_0}{t} \qquad /\cdot t$$
$$at=v-v_0 \qquad /-v$$
$$at-v=-v_0 \qquad /\cdot(-1)$$
$$v_0=v-at$$

Pedagogická poznámka: Většina studentů postupuju způsobem uvedeným vpravo, hodně z nich pak udělá chybu při násobení mínus jedničkou: $at-v=-v_0 \quad /\cdot(-1) \Rightarrow$ $v_0=-at-v$.

Př. 8: Ze vzorce pro objemovou roztažnost kapalin $V=V_0(1+\beta\cdot\Delta t)$ vyjádři počáteční objem V_0.

$$V=V_0(1+\beta\cdot\Delta t) \qquad /:(1+\beta\cdot\Delta t)$$
$$\frac{V}{1+\beta\cdot\Delta t}=V_0$$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je samozřejmě velmi jednoduchý. Právě na něm se však často ukáže, že studenti mají problém vnímat výraz $(1+\beta\cdot\Delta t)$ jako jedno číslo, kterým je možné rovnici vydělit a místo, aby rovnici vydělili, tak dělení složitě obcházejí.

Shrnutí: Při vyjadřování neznámé ze vzorce musíme s oběma stranami provádět stejné úpravy.