1.7.10 Rozklad mnohočlenů na součin III

Předpoklady: 1708, 1709

Existují i vzorce pro rozklad některých mnohočlenů s třetími mocninami:

$$a^3+b^3=(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)$$
$$a^3-b^3=(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$$

Pedagogická poznámka: Ptám se studentů, jestli už první ze vzorců náhodou neviděli. Je zajímavé, kdo si vzpomene, že před týdnem šlo o poslední příklad na dělení mnohočlenů. Konec konců dělení mnohočlenů může být při rozkládání metodou poslední možnosti.

Př. 1: Rozlož pomocí vzorce na součin mnohočleny:
a) x^3+8 b) x^3-1

a)
$$a^3+b^3=(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)$$
$$x^3+8=x^3+2^3=(x+2)\cdot(x^2-x\cdot 2+2^2)=(x+2)(x^2-2x+4)$$

b)
$$a^3-b^3=(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$$
$$x^3-1=x^3-1^3=(x-1)\cdot(x^2+x\cdot 1+1^2)=(x-1)(x^2+x+1)$$

Př. 2: Rozlož na součin mnohočleny:
a) $27x^3-1$ b) x^6+1 c) x^6-1

a) $27x^3-1=(3x)^3-1^3=(3x-1)\cdot\left[(3x)^2+3x\cdot 1+1^2\right]=(3x-1)(9x^2+3x+1)$

b) $x^6+1=(x^2)^3+1=(x^2+1)\left[(x^2)^2-x^2+1\right]=(x^2+1)(x^4-x^2+1)$

c) $x^6-1=(x^2)^3-1^3=(x^2-1)\left[(x^2)^2+x^2+1\right]=(x-1)(x+1)(x^4+x^2+1)$

můžeme postupovat i jinak:

$x^6-1=(x^3)^2-1^2=(x^3-1)(x^3+1)=(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$

výsledky vypadají jinak, zkusíme zda jsou stejné

$(x^2+x+1)(x^2-x+1)=x^4-x^3+x^2+x^3-x^2+x+x^2-x+1=x^4+x^2+1$

$\Rightarrow$ první výsledek není ještě hotový $\Rightarrow$ budeme se ještě muset moc a moc učit

Pedagogická poznámka: Stejně jako v podobných situacích i tady je první radou, aby si studenti upravili výraz do tvaru $27x^3-1=(3x)^3-1^3$. Většina z nich to sama nedělá.

Rozklad mnohočlenů x^2+px+q

Například mnohočlen: $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$
zkusíme si zpětně roznásobit předchozí rozklad a sledovat jak vzniknou členy v mnohočlenu
$(x+1)(x+2)=x^2+2x\ \ +1\cdot x+2\cdot 1=x^2+(2+1)x+2\cdot 1$

$(x+r)(x+s)=x^2+s\cdot x+r\cdot x+s\cdot r=x^2+(s+r)x+r\cdot s$

Máme trojčlen x^2+px+q a chceme ho rozložit na součin $(x+r)(x+s)$ $\Rightarrow$ známe čísla *p* a *q* a chceme najít čísla *r*, *s* $\Rightarrow$porovnáme dva zápisy mnohočlenu
$x^2+px+q=x^2+(s+r)x+r\cdot s$ $\Rightarrow$ $s+r=p$ a $r\cdot s=q$ = hledáme čísla, která po vynásobení dají *q* a po sečtení *p*.
Konkrétně:
x^2+3x+2 $\Rightarrow$ hledáme čísla, která po vynásobení dají 2 a po sečtení 3 $\Rightarrow$ $r=2;s=1$ $\Rightarrow$
$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$

Př. 3: Rozlož na součin mnohočlen $x^2+7x+10$

hledáme čísla, jejichž součet je 7 a součin 10
$x^2+7x+10=(x+2)\cdot(x+5)$

Př. 4: Rozlož na součin následující trojčleny:

a) $x^2+9x+20$ b) x^2-x-6
c) $x^2+3x-18$ d) $x^2+17x+30$
e) x^2-2x+6

a) $x^2+9x+20=(x+5)\cdot(x+4)$

b) $x^2-x-6=(x+2)\cdot(x-3)$

c) $x^2+3x-18=(x+6)\cdot(x-3)$

d) $x^2+17x+30=(x+2)(x+15)$

e) $x^2-2x+6=$ nelze, číslo 6 můžu získat bud jako $1\cdot 6=6$ nebo $2\cdot 3=6$. Ani z jedné dvojice těchto čísel nelze po součtu získat –2 $\Rightarrow$nelze vytvořit rozdíl z celých čísel (pomohla by nám kvadratická rovnice, ale tu budeme používat až později)

Někdy je potřeba trochu fantazie a předvídavosti

Př. 5: Rozlož na součin mnohočlen $3y^2+4y+1$

všechny předchozí mnohočleny byly čtyřčlenné, vyráběli jsme dva stejné dvojčleny, které jsme vytkli, teď nám jeden chybí $\Rightarrow$ jeden ze členů si rozdělíme na dva (který a jak chce odhad a zkušenosti)
$3y^2+4y+1=3y^2+3y+y+1=3y\cdot(y+1)+(y+1)=(y+1)(3y+1)$
rozdělit $4y=3y+y$ je výhodné, aby byl jeden člen s trojkou k $3y^2$ a jeden s jedničkou k 1

Pedagogická poznámka: Myšlenku před řešením říkám studentům brzo, ale jaký člen a jak konkrétně rozdělíme, jim nechám chvilku rozmyslet.

Někdy je možností víc a všechny vedou ke stejnému cíli

Př. 6: Rozlož na součin mnohočlen x^3-3x^2+4.

potřebujeme členy s jedničkou a trojkou $\Rightarrow$ rozdělíme $4=3+1$

$x^3-3x^2+4=x^3-3x^2+3+1=x^3+1-3x^2+3=\left(x^3+1\right)-3\left(x^2-1\right)=$

opět budeme pokračovat v rozkládání a doufat, že vytkneme

$(x+1)\left(x^2-x+1\right)-3(x-1)(x+1)=(x+1)\left[\left(x^2-x+1\right)-3(x-1)\right]=$

$(x+1)\left(x^2-x+1-3x+3\right)=(x+1)\left(x^2-4x+4\right)=(x+1)(x-2)^2$

jiný postup, z trojky uděláme čtyřku a jedničku

$x^3-3x^2+4=x^3+x^2-4x^2+4=x^2(x+1)-4\left(x^2-1\right)=$

$x^2(x+1)-4(x+1)(x-1)=(x+1)\left[x^2-4(x-1)\right]=(x+1)\left(x^2-4x+4\right)=$

$(x+1)(x-2)^2$

Pedagogická poznámka: Při řešení předchozího příkladu se opravdu studenti dělí na dvě skupiny s oběma řešeními. První je samozřejmě početnější.

Př. 7: Rozlož na součin mnohočleny:

a) $3x^2+5x+2$ b) x^3-7x+6

a) $3x^2+5x+2$

rozdělíme $5x=3x+2x$

$3x^2+5x+2=3x^2+3x+2x+2=3x(x+1)+2(x+1)=(x+1)(3x+2)$

b) x^3-7x+6

rozdělíme $-7x=-x-6x$

$x^3-7x+6=x^3-x-6x+6=x\left(x^2-1\right)-6(x-1)=x(x-1)(x+1)-6(x-1)=$

$(x-1)\left[x(x+1)-6\right]=(x-1)\left(x^2+x-6\right)$

ještě to půjde dále, zkusíme rozložit mnohočlen x^2+x-6 $\Rightarrow$ hledáme čísla, jejichž součin je –6 a součet +1 $\Rightarrow$ $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$´

Dosadíme do mezivýsledku: $x^3-7x+6=(x-1)\left(x^2+x-6\right)=(x-1)(x+3)(x-2)$

Př. 8: (BONUS) Rozlož na součin mnohočleny:

a) $x^3-12x+16$

b) $2x^2+x-6$

a) $x^3-12x+16$

k x potřebuju třetí mocninu nějakého čísla, nejspíš $2^3=8$ $\Rightarrow$ rozložím $16=-8+24$

$$x^3-12x+16=x^3-8-12x+24=x^3-2^3-12(x-2)=(x-2)(x^2+2x+4)-12(x-2)=$$
$$(x-2)[x^2+2x+4-12]=(x-2)(x^2+2x-8)=(x-2)(x-2)(x+4)$$

b) $2x^2+x-6$
zkusím rozložit x tak, aby ve vzniklých dvojicích byl stejný poměr mezi větší menší mocninou (po vytknutí pak získám to samé) $\Rightarrow$ $x=4x-3x$
$$2x^2+x-6=2x^2+4x-3x-6=2x(x+2)-3(x+2)=(x+2)(2x-3)$$

Shrnutí: