

1.6.3 KISS (Keep it small and stupid)

Předpoklady: 1601, 1602

Pedagogická poznámka: Následující příklady neslouží ani tolik procvičování mocnin jako výcviku „systematického postupného upravování“. Podobná kapitola se v žádné učebnici samozřejmě nevyskytuje (nic nového se v této hodině také neprobírá), přesto moje zkušenosti ukazují, že tato hodina může být velice přínosná. Úspěch při výpočtech nezávisí jenom na znalosti a dodržování pravidel, ale i na takovém způsobu výpočtu, který zabraňuje (spíše však maximálně omezuje) možnost náhodných chyb.

Pedagogická poznámka: Způsob řešení následujícího příkladu je hodně individuální. Objeví se řešení podobná tomu níže, někteří to spočítají ideálně podle zásad popsanych níže, jiní používají postupy ještě daleko těžkopádnější.

Řešení příkladu z minulé hodiny:

$$\begin{aligned} \frac{12^6 \cdot 4^3 \cdot 15^4}{50^2 \cdot 16^4 \cdot 9^4} &= \frac{(2 \cdot 2 \cdot 3)^6 \cdot (2 \cdot 2)^3 \cdot (3 \cdot 5)^4}{(2 \cdot 5 \cdot 5)^2 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)^4 \cdot (3 \cdot 3)^4} = \frac{2^6 \cdot 2^6 \cdot 3^6 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^4}{2^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 \cdot 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4} = \\ &= \frac{2^6 \cdot 2^6 \cdot 3^6 \cdot 2^6 \cdot \cancel{3^4} \cdot 5^4}{2^6 \cdot 5^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4 \cdot \cancel{3^4} \cdot 3^4} = \frac{2^6 \cdot 2^6 \cdot 2^6 \cdot \cancel{5^4}}{2^6 \cdot \cancel{5^4} \cdot 2^{12}} 3^2 = \frac{2^{\cancel{18}}}{2^{\cancel{18}}} 3^2 = 3^2 = 9 \end{aligned}$$

Výše uvedený postup má daleko k ideálu:

- s některých okamžicích bylo ve zlomku velké množství čísel
- najednou jsem dělali nesouvisející operace
- není jasné, co jsme v kterém kroku zrovna prováděli

⇒ ačkoliv jsme našťástí získali správný výsledek, náš postup nebyl ideální protože:

- hrozila velká pravděpodobnost náhodné chyby
- případnou chybu bychom špatně hledali

⇒ **nezáleží pouze na dodržování pravidel, ale také na strategii**

Co by měla správná strategie obsahovat?

- nemíchat různé věci do sebe
- snažit se stále o co největší jednoduchost a přehlednost
- zmenšovat počet členů, které musíme opisovat

podobné zásady se v programování shrnují do hesla: **KISS = keep it small and stupid**

Jak používat KISS v matematice?

- některé operace (krácení, vytvoření mocnin ..) výraz zjednodušují ⇒ použijeme je co nejdříve
- jiné operace (násobení, odstraňování závorek...) výraz zesložit'ují ⇒ použijeme je až jako poslední, po co největším zjednodušení ostatního
- v jednom okamžiku se budeme snažit provádět stejné úpravy
- nebudeme plést několik věcí dohromady
- opisujeme tak, aby původní výraz a jeho úprava „zůstaly na stejném místě“
- ...

Př. 1: Vyjádři pomocí mocnin prvočísel výraz $\frac{12^6 \cdot 4^3 \cdot 15^4}{50^2 \cdot 16^4 \cdot 9^4}$.

Před vlastním řešením nejdříve zvol strategii zjednodušování tak, abys dodržel zásadu KISS (keep it small and stupid).

Snažím se udržovat příklad přehledný a jednoduchý \Rightarrow

všechny úpravy, kdy se zesložit'uje, provedu až když budu mít části, kterých se týká co nejjednodušší

\Rightarrow upravím vnitřky co nejvíce před

- odstraněním závorek
- krácením ve zlomcích
- dáváním zlomků dohromady

Postup dalšího výpočtu budu psát vždy na konec řádku.

$$\frac{12^6 \cdot 4^3 \cdot 15^4}{50^2 \cdot 16^4 \cdot 9^4} = \quad \text{čísla nahradím prvočíselnými rozklady}$$

$$\frac{(2^2 \cdot 3)^6 \cdot (2^2)^3 \cdot (3 \cdot 5)^4}{(2 \cdot 5^2)^2 \cdot (2^4)^4 \cdot (3^2)^4} = \quad \text{odstráním závorek}$$

$$\frac{2^{12} \cdot 3^6 \cdot 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^4}{2^2 \cdot 5^4 \cdot 2^{16} \cdot 3^8} = \quad \text{upravím čítelel a jmenovatel zlomku}$$

$$\frac{2^{12+6} \cdot 3^{6+4} \cdot 5^4}{2^{2+16} \cdot 5^4 \cdot 3^8} = \frac{2^{18} \cdot 3^{10} \cdot 5^4}{2^{18} \cdot 5^4 \cdot 3^8} \quad \text{zjednoduším zlomek}$$

$$= 3^{10-8} = 3^2 = 9$$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad počítám na tabuli. Vždy si řekneme, jaké úpravy provedem, studenti je udělají v sešitě, já na tabuli (zezadu) a pak je kontrolujeme.

Př. 2: Vypočti. Před vlastním řešením nejdříve zvol strategii zjednodušování tak, abys dodržel zásadu KISS (keep it small and stupid).

$$\text{a) } \frac{3(a^3b^2)^3}{(2a^2b)^2} \cdot \left(\frac{2a^4b^3}{a^3b}\right)^3 \quad \text{b) } \left(\frac{2a^5b^4}{3a^3b}\right)^3 : \frac{(2a^3b^2)^3}{9(2a^2b)^2}$$

a)

$$\frac{3(a^3b^2)^3}{(2a^2b)^2} \cdot \left(\frac{2a^4b^3}{a^3b}\right)^3 = \quad \text{vlevo odstráním závorek, vpravo upravím zlomek}$$

$$\frac{3a^9b^6}{2^2a^4b^2} \cdot (2ab^2)^3 = \quad \text{vlevo upravím zlomek, vpravo odstráním závorek}$$

$$\frac{3}{4} a^5b^4 \cdot 8a^3b^6 = \quad \text{obě části výrazu dám dohromady}$$

$$2 \cdot 3 \cdot a^{5+3} b^{4+6} = 6a^8b^{10}$$

b)

$$\left(\frac{2a^5b^4}{3a^3b}\right)^3 : \frac{(2a^3b^2)^3}{9(2a^2b)^2} =$$

vlevo upravím zlomek, vpravo odstraním závorky

$$\left(\frac{2}{3}a^2b^3\right)^3 : \frac{2^3a^9b^6}{9 \cdot 2^2a^4b^2} =$$

vlevo odstraním závorku, vpravo upravím zlomek

$$\left(\frac{2^3}{3^3}a^6b^9\right) : \left(\frac{2}{9}a^5b^4\right) =$$

vydělím obě části výrazu

$$\frac{2^3}{3^3}a^{6-5}b^{9-4} = \frac{4}{3}ab^5$$

Pedagogická poznámka: U obou předchozích příkladů při kontrole trvám na tom, aby studenti počítali pod KISS. Při písémkách je styl výpočtu jejich věcí, ale při hodinách tlačím i na správnou strategii.

Př. 3: Vyjádři pomocí mocnin prvočísel výraz $\frac{5 \cdot (15^2 \cdot 48)^2}{(15 \cdot 12)^3 \cdot 8^2} \cdot \left(\frac{[12 \cdot 5]^6 \cdot 16^2}{[25 \cdot 18]^3 \cdot 32^3}\right)^2$.

Před vlastním řešením nejdříve zvol strategii zjednodušování tak, abys dodržel zásadu KISS (keep it small and stupid).

Snažím se udržovat příklad přehledný a jednoduchý \Rightarrow všechny úpravy, kdy se zesložit'uje, provedu až když budu mít části, kterých se týká co nejjednodušší

\Rightarrow upravím vnitřky co nejvíce před

- odstraněním závorek
- krácením ve zlomcích
- dáváním zlomků dohromady

$$\frac{5 \cdot (15^2 \cdot 48)^2}{(15 \cdot 12)^3 \cdot 8^2} \cdot \left(\frac{[12 \cdot 5]^6 \cdot 16^2}{[25 \cdot 18]^3 \cdot 32^3}\right)^2 =$$

složená čísla rozložím na prvočísla

$$\frac{5 \cdot ([3 \cdot 5]^2 \cdot 2^4 \cdot 3)^2}{(5 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 3)^3 \cdot [2^3]^2} \cdot \left(\frac{[2^2 \cdot 3 \cdot 5]^6 \cdot [2^4]^2}{[5^2 \cdot 2 \cdot 3^2]^3 \cdot [2^5]^3}\right)^2 =$$

odstraním vnitřní hranaté závorky

$$\frac{5 \cdot (3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^4 \cdot 3)^2}{(5 \cdot 3^2 \cdot 2^2)^3 \cdot 2^6} \cdot \left(\frac{2^{12} \cdot 3^6 \cdot 5^6 \cdot 2^8}{5^6 \cdot 2^3 \cdot 3^6 \cdot 2^{15}}\right)^2 =$$

vlevo nahoře zjednoduším vnitřek závorky, vlevo dole odstraním závorku, vpravo zjednoduším čísel a jmenovatel zlomku

$$\frac{5 \cdot (3^3 \cdot 5^2 \cdot 2^4)^2}{5^3 \cdot 3^6 \cdot 2^6 \cdot 2^6} \cdot \left(\frac{2^{20} \cdot 3^6 \cdot 5^6}{5^6 \cdot 2^{18} \cdot 3^6}\right)^2 =$$

vlevo nahoře odstraním závorku, vlevo dole zjednoduším jmenovatel, vpravo zjednoduším zlomek

$$\frac{5 \cdot 3^6 \cdot 5^4 \cdot 2^8}{5^3 \cdot 3^6 \cdot 2^{12}} \cdot (2^2)^2 =$$

vlevo zjednoduším čísel a zkrátím zlomek, vpravo odstraním závorku

$$\frac{5^5 \cdot 2^8}{5^3 \cdot 2^{12}} \cdot 2^4 =$$
$$5^2 \frac{2^8}{2^{12}} \cdot 2^4 = 5^2$$

Př. 4: Sbíрка příklad 5.

Př. 5: Petáková:
strana 62/cvičení 44 a)

Shrnutí: Pokud se nechceme při zjednodušování výrazů udít k smrti, musíme dodržovat zásadu KISS (keep it small and stupid – udržuj to jednoduché a přehledné).