

1.4.3 Složené výroky – implikace a ekvivalence

Předpoklady: 1401, 1402

Pedagogická poznámka: Látka zabere spíše jeden a půl vyučovací hodiny. Buď můžete využít písemku nebo se podělit o čas s následující hodinou, která se také nedá stihnout za 45 minut.

Implikace

Implikace libovolných výroků a, b je výrok, který vznikne jejich spojením slovním obratem **jestliže, pak**, píšeme $a \Rightarrow b$ a čteme **jestliže a , pak b** .

Výroku a se říká předpoklad, výroku b závěr.

Pravdivostní tabulka. Příklad výroku: Když přijdeš, dám ti 100 Kč.

a	b	$a \Rightarrow b$	
1	1	1	Přijdeš a dám 100 Kč – měl jsem pravdu
1	0	0	Přijdeš a nedám 100 Kč – lhal jsem
0	1	1	Nepřijdeš a dám 100 Kč – měl jsem pravdu, o této možnosti jsem nehovořil
0	0	1	Nepřijdeš a nedám 100 Kč – měl jsem pravdu, o této možnosti jsem nehovořil

Pedagogická poznámka: Následující výroky využívají některé vlastnosti autora učebnice.

Jde o můj zvyk nosit stále stejné oblečení, konkrétně modrý svetr. Následující výroky pak dokumentují, jak je to s pravdivostí implikací, které vycházejí z výroku zjevně pravdivého („Krynický má modrý svetr“) nebo z výroku zjevně nepravdivého („tabule je oranžová“). Podobné zvláštnosti má určitě každý učitel, takže si můžete sestavit podobné výroky na sebe.

Př. 1: Rozhodni zda je pravdivý výrok: „Jestli má Krynický modrý svetr, pak je oranžová tabule.“

Jde výrok složený ze dvou výroků:

a : Krynický má modrý svetr – pravda (1)

b : Tabule je oranžová – nepravda (0)

Celý výrok má tvar $a \Rightarrow b$, dosadím pravdivosti výroků $1 \Rightarrow 0 = 0$.

Výrok je nepravdivý.

Př. 2: Rozhodni zda je pravdivý výrok: „Jestli je oranžová tabule, pak má Krynický modrý svetr.“

Jde výrok složený ze dvou výroků:

a : Tabule je oranžová – nepravda (0)

b : Krynický má modrý svetr – pravda (1)

Celý výrok má tvar $a \Rightarrow b$, dosadím pravdivosti výroků $0 \Rightarrow 1 = 1$.

Výrok je pravdivý.

Z pravdivosti implikace $a \Rightarrow b$ nevyplývá pravdivost implikace $b \Rightarrow a$ (obrácená implikace). U implikace (na rozdíl od konjunkce a disjunkce) záleží na pořadí výroků!
Předchozí větu můžeme snadno dokumentovat pomocí následujících implikací:

Je-li číslo dělitelné šesti, je dělitelné i třemi. - pravda
Je-li číslo dělitelné třemi, je dělitelné i šesti. - obrácená implikace je nepravdivá

Př. 3: Rozhodni zda je pravdivý výrok: „Jestliže je tabule oranžová, pak Krynický je hezká holka.“

Jde výrok složený ze dvou výroků:

a : Tabule je oranžová – nepravda (0)

b : Krynický je hezká holka – nepravda (0)

Celý výrok má tvar $a \Rightarrow b$, dosadím pravdivosti výroků $0 \Rightarrow 0 = 1$.

Výrok je pravdivý.

Pedagogická poznámka: Studenti mají problém s tím, že pravdivá implikace může obsahovat i dvě zcela nesmyslná tvrzení. Je třeba pořád zdůrazňovat, že jde více o vzájemný vztah dvou výroků než o výroky samé.
Jinak předchozí výrok je obdobou ještě dnes používaného „jestli si chytil takovouhle rybu, tak já jsem čínskej bůh srandy“.

Př. 4: Urči pravdivostní hodnotu výroků:

- Jestliže je Země kulatá, pak obíhá kolem Slunce.
- Jestliže je Země kulatá, pak je plochá.
- Jestliže je Země plochá, pak je kulatá.
- Jestliže je Země plochá, pak se dá srolovat do igelitky.

Nejdříve si určíme pravdivost jednotlivých výroků:

Země je kulatá. – pravdivý výrok

Země obíhá kolem Slunce – pravdivý výrok

Země je plochá – nepravdivý výrok

Země se dá srolovat do igelitky – nepravdivý výrok

Teď rozebereme jednotlivé výroky:

- Jestliže je Země kulatá, pak obíhá kolem Slunce. \Rightarrow výrok $1 \Rightarrow 1 = 1$ - pravda
- Jestliže je Země kulatá, pak je plochá. \Rightarrow výrok $1 \Rightarrow 0 = 0$ - nepravda
- Jestliže je Země plochá, pak je kulatá. \Rightarrow výrok $0 \Rightarrow 1 = 1$ - pravda
- Jestliže je Země plochá, tak se dá srolovat do igelitky. \Rightarrow výrok $0 \Rightarrow 0 = 1$ - pravda

Př. 5: Pomocí tabulky pravdivostních hodnot rozhodni, kdy je pravdivý výrok
 $(a \wedge b) \Rightarrow a$

a	b	$a \wedge b$	$(a \wedge b) \Rightarrow a$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Výrok $(a \wedge b) \Rightarrow a$ je pravdivý vždy nezávisle na tom, zda jdou pravdivé výroky a, b , ze kterých je sestaven. Takový výrok se nazývá **tautologie**.

Př. 6: Dosad' do formule $(a \wedge b) \Rightarrow a$ dva libovolné konkrétní výroky a, b a ověř, že jsi získal pravdivý výrok.

Zvolíme třeba dva nepravdivé výroky:

a : Číslo 5 je sudé.

b : Číslo 5 je záporné.

Získáváme výrok: „Je-li číslo 5 sudé a zároveň záporné, pak je sudé.“

Př. 7: Najdi další tautologie. Pravdivost odhadu dokaž pomocí tabulky pravdivostních hodnot a ověř dosazením libovolných výroků.

Možností je mnoho, ty nejjednodušší:

$a \vee \neg a$ - (u disjunkce stačí jeden pravdivý výrok, zvolím výrok a a jeho negaci, vždy je právě jeden z nich pravdivý)

a	$\neg a$	$a \vee \neg a$
1	0	1
0	1	1

Zkusíme nepravdivý výrok a : Země je placatá.

$a \vee \neg a$: Země je nebo není placatá.

$a \Rightarrow a$ - (implikace je nepravdivá jen s pravdivým předpokladem a nepravdivým závěrem, pokud použiju jediný výrok nemůže tato situace nikdy nastat)

a	$a \Rightarrow a$
1	1
0	1

Zkusíme nepravdivý výrok a : Země je placatá.

$a \Rightarrow a$: Je-li Země placatá, pak je placatá.

Poznámka: Zde může matematika vhodně pomoci dospívajícímu při výslechu rodičů.

V odpovědích na zvědavé dotazy můžete používat tautologie, nebudete tak lhát a rodiče se nic nedovědí. Například na otázku: „Tak co, byla si tam s tím šaškem?“, se hodí obě tautologie: „Byla jsem tam s ním nebo jsem tam s ním nebyla“ nebo „Jestli jsem tam s ním byla, pak jsem tam s ním byla“.

Pedagogická poznámka: V předchozích dvou příkladech by měli studenti do formulí dosazovat svoje vlastní výroky, aby si dosazování vyzkoušeli. Budou ho potřebovat na konci hodiny.

Ekvivalence

Př. 8: Ekvivalence libovolných výroků a, b (značíme ji $a \Leftrightarrow b$) je konjunkce implikace $a \Rightarrow b$ a obrácené implikace $b \Rightarrow a$. Zapiš tento výrok pomocí formule a doplň její tabulku pravdivostních hodnot.

Formuli sestavíme postupně:

Ekvivalence libovolných výroků a, b je konjunkce \Rightarrow tvar výroku $() \wedge ()$

Doplníme implikace, ze kterých je sestavená konjunkce: $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$

a	b	$a \Rightarrow b$	$b \Rightarrow a$	$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$	$a \Leftrightarrow b$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

Pedagogická poznámka: Postupný přístup při sestavování formule se nám bude hodit při slovních úlohách.

Shrňme:

Ekvivalence

- Ekvivalence libovolných výroků a, b je konjunkce implikace $a \Rightarrow b$ a obrácené implikace $b \Rightarrow a$, tedy výrok $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$ – značíme jej $a \Leftrightarrow b$ a čteme (**a je ekvivalentní s b nebo a platí právě tehdy, když platí b**).
- Ekvivalence $a \Leftrightarrow b$, kde a, b jsou libovolné výroky je pravdivá pouze tehdy, když výroky a, b jsou oba pravdivé nebo oba nepravdivé.

Význam ekvivalence je schován už v názvu: ekvivalentní = stejný, odpovídající
Když zjišťujeme zda jsou dva výroky jsou ekvivalentní, zjišťujeme zda říkají to samé.

Př. 9: Rozhodni zda jsou výroky $a \Rightarrow b$, $b \Rightarrow a$ a $\neg b \Rightarrow \neg a$ ekvivalentní.

Napíšeme tabulku pravdivostních hodnot a pokud budou sloupce u výroků stejné jsou ekvivalentní.

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$a \Rightarrow b$	$b \Rightarrow a$	$\neg b \Rightarrow \neg a$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1

Sloupce výroků $a \Rightarrow b$ a $\neg b \Rightarrow \neg a$ jsou stejné \Rightarrow ekvivalence $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$ platí vždy \Rightarrow výroky $a \Rightarrow b$ a $\neg b \Rightarrow \neg a$ jsou ekvivalentní.

Výrok $\neg b \Rightarrow \neg a$ se nazývá **obměněná implikace** k implikaci $a \Rightarrow b$ a **je s ní ekvivalentní**. Tato vlastnost se používá při metodě nepřímého důkazu.

Výrok $b \Rightarrow a$ se nazývá **obrácená implikace** k implikaci $a \Rightarrow b$ a **není s ní ekvivalentní**.

Př. 10: Zformuluj obměněnou implikaci k výroku: „Je-li trojúhelník pravoúhlý, pak pro jeho strany platí Pythagorova věta.“.

Stačí mechanicky negovat obě věty a prohodit jejich pořadí v souvětí.

Neplatí-li pro strany trojúhelníku Pythagorova věta, pak není pravoúhlý.

Pedagogická poznámka: Předchozí a následující příklad jsou cvičení na dosazování výroků do formulí. V některých případech je to trochu krkolomné, ale právě proto je to důležité cvičení obecnější schopnosti „dodržovat pravidlo“. Je důležité, aby maximum výroků zkusili studenti zformulovat sami.

Př. 11: Zformuluj obměněné implikace k následujícím výrokům:

- a) Jestliže je číslo x dělitelné šesti, tak je dělitelné třemi.
- b) Pokud je číslo x větší než 10, je kladné.
- c) Jestli to stihnu, tak přijdu.
- d) Jestli to řekneš ještě jednou, tak ti dám pěstí.

Stačí mechanicky negovat obě věty a prohodit jejich pořadí v souvětí.

a) Jestliže je číslo x dělitelné šesti, tak je dělitelné třemi.

Obměněná implikace: Jestliže číslo x není dělitelné třemi, není dělitelné šesti.

b) Pokud je číslo x větší než 10, je kladné.

Obměněná implikace: Pokud číslo není kladné, není větší než 10.

c) Jestli to stihnu, tak přijdu.

Obměněná implikace: Jestli nepřijdu, tak to nestihnu.

d) Jestli to řekneš ještě jednou, tak ti dám pěstí.

Obměněná implikace: Jestli Ti dám pěstí, tak to řekneš ještě jednou.

Př. 12: Petáková:

strana 10/cvičení 5

strana 10/cvičení 6

strana 10/cvičení 7 b)

strana 10/cvičení 8 a) b) d)

strana 10/cvičení 9

Shrnutí: Jakákoliv implikace vycházející z nepravdy je pravdivá.