1.4.1 Výroky

Předpoklady:

Výrok je sdělení, u něhož má smysl otázka, zda je či není pravdivé

Číslo π je iracionální. $\Rightarrow$ pravdivý výrok
Ach jo, zase matika. $\Rightarrow$ není výrok
V rozvrhu máme deset hodin matematiky týdně. $\Rightarrow$ nepravdivý výrok
Matematika je nejlepší předmět. $\Rightarrow$ není výrok, jde o věc vkusu

Pozor: formule $a^2+b^2=c^2$ není výrok, nevíme, co znamenají písmena a, b, c $\Rightarrow$ musíme význam písmen specifikovat.
Různá specifikace vede k různým výsledkům:

- Pro všechny pravoúhlé trojúhelníky s odvěsnami a, b a přeponou c platí $a^2+b^2=c^2$ $\Rightarrow$ pravdivý výrok (Pythagorova věta)
- Pro všechny trojúhelníky se stranami a, b, c platí: $a^2+b^2=c^2$. $\Rightarrow$ nepravdivý výrok.

Poznámka: Bohužel ani v matematických učebnicích se všechny věty vždy neformulují zcela kompletně (jsou pak často příliš dlouhé) a předpokládá se, že neuvedené informace jsou jasné z kontextu

Př. 1: U následujících vět rozhodni, zda jsou nebo nejsou výroky a urči jejich pravdivost (často se také říká **pravdivostní hodnotu**).
a) Těžnice trojúhelníků se protínají v jednom bodě.
b) Všechna reálná čísla jsou kladná.
c) Některá reálná čísla jsou kladná.
d) Kyš, kyš.
e) Hlavním městem Indie je Karáčí.
f) Máš úkol?
g) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
h) Tabule je pravoúhlý trojúhelník.
ch) Jana je nejhezčí holka ve škole.

a) Těžnice trojúhelníků se protínají v jednom bodě. $\Rightarrow$ pravdivý výrok
b) Všechna reálná čísla jsou kladná. $\Rightarrow$ nepravdivý výrok
c) Některá reálná čísla jsou kladná. $\Rightarrow$ pravdivý výrok
d) Kiš, kiš. $\Rightarrow$ není výrok
e) Hlavním městem Indie je Karáčí. $\Rightarrow$ nepravdivý výrok
f) Máš úkol? $\Rightarrow$ není výrok (jde o otázku, smyslem věty není něco sdělit o skutečném stavu, ale něco zjistit $\Rightarrow$ nejde výrok. Naopak věta: Máš dnešní úkol z matematiky by byla výrokem)
g) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ $\Rightarrow$ není výrok (nevíme, co znamenají proměnné a, b, c)
h) Tabule je pravoúhlý trojúhelník. $\Rightarrow$ není výrok (jde zjevně o nesmyslné tvrzení. Na druhou stranu při troše dobré vůle by bylo možné větu za výrok považovat)
ch) Jana je nejhezčí holka ve škole. $\Rightarrow$ není výrok (jde o věc vkusu, který má každý

jiný. Věta „Jana je nejvyšší holka ve škole." by však výrokem byla, protože by bylo možné všechny holky přeměřit a zjistit zda je Janina výška největší)

Pedagogická poznámka: (rada od oktávy 2012) Jméno Jana v posledním bodě by mělo být nahrazeno jménem dívky ze třídy, která se látku učí. Pak by se ukázalo, zda je jí bližší matematická správnost nebo ješitnost.

Př. 2: Doplň větu: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ tak, aby z ní byl pravdivý výrok.

Pro všechna reálná čísla *a*, *b* platí: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Negace výroku *v* (značíme $\neg v$) je tvrzení, které má opačnou pravdivostní hodnotu.

Př. 3: Doplň věty:
a) Je-li výrok *v* pravdivý, je výrok $\neg v$ …
b) Je-li výrok *v* nepravdivý, je výrok $\neg v$ …

a) Je-li výrok *v* pravdivý, je výrok $\neg v$ nepravdivý.
b) Je-li výrok *v* nepravdivý, je výrok $\neg v$ pravdivý.

Jak vyrobit negaci výroku?
v: Číslo 5 je liché.
Dvě možnosti:

- $\neg v$: Není pravda, že číslo 5 je liché.
- $\neg v$: Číslo 5 je sudé.

První možnost je zcela mechanická $\Rightarrow$ k ničemu, protože nepřináší nic nového.
Druhá možnost se může hodit, ale někdy je problém vyrobit ji správně.

Př. 4: Vytvoř negaci výroku *v*: Číslo –2 je záporné.

Chybná negace: Číslo –2 je kladné.
Správná negace: Číslo –2 je kladné nebo nula.
$\Rightarrow$ kromě kladných a záporných čísel, existuje také nule a tu musím zahrnout.
$\Rightarrow$ negace musí obsahovat všechny možnosti, „nezahrnuté" v původním výroku.

Pedagogická poznámka: Chybu v předchozím příkladě udělají nejdříve všichni. Teprve, když studentům řeknete, že negaci sestavili špatně, někteří chybu najdou a odstraní.

Můžeme si situaci znázornit.
Máme tři skupiny čísel
záporná čísla nula kladná čísla
původní výrok: „Číslo –2 je záporné." $\Rightarrow$ patří do modré skupiny
negace: „Číslo –2 není záporné." $\Rightarrow$ nepatří do modré skupiny $\Rightarrow$ patří do zelené nebo červené $\Rightarrow$ „Číslo –2 je kladné nebo nula."

Pedagogická poznámka: Vzhledem k tomu, že studenti mají tendenci snažit se zapamatovat všechno, je dobré jim zdůraznit, že z dnešní hodiny je toto první informace, která si zaslouží zapamatování. Všechno předchozí bylo totiž asi jasné.

Pedagogická poznámka: Studentům připadá často zcela absurdní věta „Číslo –2 je kladné nebo nula“. Je dobré jim zdůraznit, že mají pravdu, výrok je nepravdivý, ale z pohledu logiky je úplně jedno, zda je výrok pravdivý nebo ne.

Př. 5: Najdi negace následujících výroků (takové, aby neobsahovaly zápor):
a) Trojúhelník *ABC* je ostroúhlý.
b) Daný trojúhelník *ABC* nemá všechny strany stejné.
c) Přímky *p*, *q* mají společný právě jeden bod.
d) Kořen rovnice $x-3=3$ je záporné číslo.
e) $\sqrt{2}+\pi>4$

v	$\neg v$
Daný trojúhelník *ABC* je ostroúhlý.	Daný trojúhelník *ABC* je tupoúhlý nebo pravoúhlý.
Daný trojúhelník *ABC* nemá všechny strany stejné.	Daný trojúhelník *ABC* je rovnostranný.
Přímky *p*, *q* mají společný právě jeden bod.	Přímky *p*, *q* mají alespoň dva nebo žádný společný bod.
Kořen rovnice $x-3=3$ je záporné číslo.	Kořen rovnice $x-3=3$ je buď kladné nebo 0.
$\sqrt{2}+\pi>4$	$\sqrt{2}+\pi\le 4$

Výroky o počtu

Př. 6: Student musí v průběhu jednoho školního pololetí získat z každého předmětu alespoň tři známky. Urči všechny počty známek, které vyhovují této podmínce.

Alespoň tři $\Rightarrow$ student může mít 3, 4, 5 …. $\Rightarrow$ 3 nebo víc známek

Př. 7: Množina *M* má **alespoň *k* prvků**. Urči jakým číslům může být roven počet jejich prvků.

Počet prvků je větší nebo roven *k*.

Př. 8: Student musí v průběhu jednoho školního pololetí získat z každého předmětu alespoň tři známky. Urči všechny počty známek, které nevyhovují této podmínce.

Má mít alespoň tři $\Rightarrow$ student nesmí mít 0, 1, 2 …. $\Rightarrow$ student má smůlu, pokud má nejvýše 2 známky

Př. 9: Množina M má **alespoň k prvků**. Urči jakým číslům nemůže být roven počet jeho prvků.

Počet prvků nesmí být menší než k.
Kdybychom chtěli použít spojení se slovem nejvýše, řekli bychom, že nevyhovují množiny, jejichž počet prvků je **nejvýše k-1.**

Př. 10: Student smí v průběhu jednoho školního pololetí zameškat nejvýše tři písemky. Urči všechny počty zameškaných písemek, které vyhovují této podmínce.

Nejvýše tři $\Rightarrow$ student může zameškat 3, 2, 1 nebo 0 $\Rightarrow$ 3 nebo míň

Př. 11: Množina N má **nejvýše k prvků**. Urči jakým číslům může být roven počet jejich prvků.

Počet prvků je menší nebo roven k.

Př. 12: Student smí v průběhu jednoho školního pololetí zameškat nejvýše tři písemky. Urči všechny počty zameškaných písemek, které nevyhovují této podmínce.

Smí zameškat nejvýše tři $\Rightarrow$ nesmí zameškat 4, 5, 6, … $\Rightarrow$ 4 nebo víc

Př. 13: Množina N má **nejvýše k prvků**. Urči jakým číslům nemůže být roven počet jeho prvků.

Počet prvků nesmí být větší než k.
Kdybychom chtěli použít spojení se slovem alespoň, řekli bychom, že nevyhovují množiny, jejichž počet prvků je **alespoň k+1.**

Tím jsme se vlastně naučili negovat výroky o počtu.

Př. 14: Doplň tabulku negací výroků o počtu:

v	$\neg v$
Množina M má alespoň k prvků.	
Množina M má nejvýše k prvků.	

v	$\neg v$
Množina M má alespoň k prvků.	Množina M má nejvýše k-1 prvků.
Množina M má nejvýše k prvků.	Množina M má alespoň k+1 prvků.

Pedagogická poznámka: Opět studentům říkám, že lepší než si pamatovat tabulku negací výroků o počtu je pamatovat si, že negace snadno odvodí pomocí přemýšlení o konkrétním příkladě.

Vytvoříme negaci výroku: „Konvexní šestiúhelník má 9 úhlopříček.“
Původní výrok:„ má 9 úhlopříček.“ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 ...
Negace: „nemá 9 úhlopříček.“ $\Rightarrow$ musím popsat všechna nečervená čísla $\Rightarrow$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 ... $\Rightarrow$ .. má nejvýše 8 nebo nejméně 10 $\Rightarrow$
Konvexní šestiúhelník má nejvýše 8 nebo nejméně 10 úhlopříček.“

Př. 15: Vytvoř negace následujících výroků bez použití záporu:
a) Rovnice $x^2 - x - 3 = 0$ má alespoň dvě řešení.
b) Číslo 12 má nejvýše 5 dělitelů.
c) Krychle má nejvýše 8 vrcholů.
d) Existují právě 4 prvočísla menší než 10.
e) *n* bodů rozdělí přímku na nejvýše $n+1$ částí.
f) Množina *M* má právě $n-1$ prvků.

v	$\neg v$
Rovnice $x^2 - x - 3 = 0$ má alespoň dvě řešení.	Rovnice $x^2 - x - 3 = 0$ má nejvýše jedno řešení.
Číslo 12 má nejvýše 5 dělitelů.	Číslo 12 má alespoň 6 dělitelů.
Krychle má nejvýše 8 vrcholů.	Krychle má alespoň 9 vrcholů.
Existují právě 4 prvočísla menší než 10.	Existují právě nejvýše 3 nebo alespoň 5 prvočísel menších než 10.
n bodů rozdělí přímku na nejvýše $n+1$ částí.	*n* bodů rozdělí přímku na alespoň $n+2$ částí.
Množina *M* má právě $n-1$ prvků.	Množina *M* má nejvýše $n-2$ prvků nebo alespoň *n* prvků.

Př. 16: Petáková:
strana 11/cvičení 1
strana 11/cvičení 2
strana 11/cvičení 12
strana 11/cvičení 15 a) b) c)

Shrnutí: Do negace výroku musíme zahrnout všechny možnosti, které neobsahuje původní výrok.