1.3.6 Intervaly

Předpoklady: 1206, 1301, 1302,

Problém:

Množinu $A = \{x \in \mathbb{Z}; 2 \le x \le 5\}$ zapíšu snadno i výčtem: $A = \{2;3;4;5\}$.

Jak zapsat množinu $B = \{x \in \mathbb{R}; 2 \le x \le 5\}$?
Jde o nekonečně mnoho čísel (2, 5 a všechno mezi nimi) $\Rightarrow$ existuje úspornější zápis:
$B = \{x \in \mathbb{R}; 2 \le x \le 5\} = \langle 2;5 \rangle$
Zápis $\langle 2;5 \rangle$ znamená: máme čísla 2, 5 a všechno mezi nimi $\Rightarrow$ význam číslic je jasný, závorky znamenají „a všechno mezi nimi“. Této množině říkáme **interval (uzavřený).**

Jak zapíšu množinu $C = \{x \in \mathbb{R}; 3 < x < \sqrt{40}\}$?
opět nekonečně mnoho čísel (všechno mezi 3 a $\sqrt{40}$) $\Rightarrow$ podobné jako předtím, ale bez krajních bodů $\Rightarrow$ použiju stejný systém, ale změním závorky (aby bylo vidět, že tam krajní body nepatří):
$C = \{x \in \mathbb{R}; 3 < x < \sqrt{40}\} = (3;\sqrt{40})$ Této množině říkáme **interval (otevřený).**

Př. 1: Zapiš pomocí intervalu následující množiny:
a) $A = \{x \in \mathbb{R}; -2 \le x < \pi\}$
b) $B = \{x \in \mathbb{Z}; 1 \le x \le \sqrt{5}\}$
c) $C = \{x \in \mathbb{R}; 0 \le x < \sqrt{7}\}$

a) $A = \{x \in \mathbb{R}; -2 \le x < \pi\} = \langle -2;\pi)$
b) $B = \{x \in \mathbb{Z}; 1 \le x \le \sqrt{5}\}$ - nejde x je pouze z celých čísel $\Rightarrow$ na ose pouze body
c) $C = \{x \in \mathbb{R}; 0 \le x < \sqrt{7}\} = \langle 0;\sqrt{7})$

Pedagogická poznámka: Jediné problémy jsou s bodem b), kde studenti často zapomínají, že zápis $\langle 1;\sqrt{5} \rangle$ znamená 1 a $\sqrt{5}$ a „všechna čísla mezi nimi“ a není možné jej použít na zápis podmnožiny celých čísel.

Přehled omezených intervalů.

Charakteristická vlastnost	Zápis intervalu	Zakreslení na ose	Název
$a \le x \le b$	$\langle a,b \rangle$		uzavřený interval
$a < x \le b$	$(a,b \rangle$		Polozavřený interval(nalevo otevřený, napravo uzavřený)

$a \le x < b$	$\langle a,b)$		Polozavřený interval(napravo otevřený, nalevo uzavřený)
$a < x < b$	(a,b)		Otevřený interval

Pedagogická poznámka: Předchozí tabulku promítnu studentům, ale do sešitu ji nepřepisujeme. Stejně jako pozdější tabulku s neomezenými intervaly.

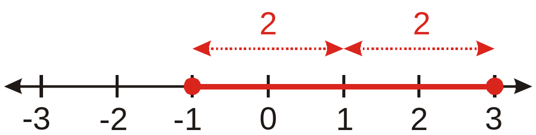
POZOR:

- Při zápisu intervalu musí být menší číslo vlevo: (1,7) je dobře (7,1) je nesmysl
- Je rozdíl mezi $\langle 1,2\rangle$ a $\{1,2\}$. $\{1,2\}$ je množina, která obsahuje pouze dvě čísla: 1 a 2. Množina $\langle 1,2\rangle$ obsahuje nekonečně mnoho čísel a to 1, 2 a všechna mezi nimi (např. 1,5; 1,9999999; 1,000001atd.)

Pedagogická poznámka: Studenti často pletou různé druhy závorek. Snažím se to netolerovat, zejména tím, že si hraju na hlupáka, výsledky beru doslovně a nesnažím se domýšlet, co vlastně studenti zápisem chtěli sdělit.

Př. 2: Všechna reálná čísla, pro něž platí $|x-1| \le 2$, zapiš pomocí intervalu.

Nakreslím řešení na číselnou osu:



Řešením je tedy interval $\langle -1;3\rangle$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad by studenti měli umět, protože se probíral přibližně týden a půl před touto hodinou. Už tak krátká doba stačí k tomu, aby někteří červený rámeček na význam absolutní hodnoty z rozdílu dvou čísel zapomněli. Takže rozdávám mínusy a snažím se ukázat, jaký je rozdíl v obtížnosti příkladu pro ty, kteří si pamatují a kteří všechno zapomněli.

Př. 3: Všechna reálná čísla, pro něž platí $|x-a| \le k$, zapiš pomocí intervalu. Při řešení nevyužívej číselnou osu. Vymysli, co nejvíce způsobů, jak zkontrolovat správnost výsledku.

$|x-a| \le k$ $\Rightarrow$ hledám čísla vzdálená od *a* o *k* a méně

$\Rightarrow$ má smysl pouze pro $k > 0$ (neexistuje záporná vzdálenost)

nejmenší hledané číslo $a-k$ (vzdálené od *a* o *k* směrem vlevo)

největší hledané číslo $a+k$ (vzdálené od *a* o *k* směrem vpravo)

$\Rightarrow$ interval $\langle a-k;a+k\rangle$

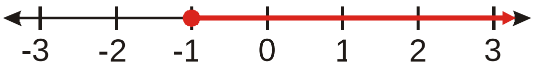
Kontroly

1. Dosazení konkrétních čísel, pro které známe řešení.

$|x-1| \leq 2$ má řešení $\langle -1;3 \rangle$
platí $a=1$; $k=2$
dosadím do řešení příkladu: $\langle a-k;a+k \rangle = \langle 1-2;1+2 \rangle = \langle -1;3 \rangle$

2. Odvození jiným způsobem
řeším příklad $|x-1| \leq 2 \Rightarrow$ hledám čísla vzdálená od 1 o 2 a méně
interval $\langle 1-2;1+2 \rangle = \langle -1;3 \rangle$ - ponechám nevypočtené řešení $\langle 1-2;1+2 \rangle$, je z něj vidět postup. Platí $a=1$; $k=2$
$\langle 1-2;1+2 \rangle = \langle a-k;a+k \rangle$

Př. 4: Znázorni na číselné ose všechna čísla, která vyhovují podmínce $x \geq -1$.



Na ose vnikla polopřímka, množina je ohraničená pouze z jedné strany $\Rightarrow$ napíše se $\langle -1...$, ale $\langle -1;\infty)$.

Znak ∞ znamená, že směrem doprava se jde pořád dál $\Rightarrow$ $\langle -1;\infty)$ je neomezený interval.

Př. 5: Zapiš pomocí intervalu následující množiny:
a) $A = \{x \in \mathbb{Q}; x \geq -2\}$
b) $B = \{x \in \mathbb{R}; x \leq 1{,}01\}$
c) $C = \left\{x \in \mathbb{R}; x > -\frac{2}{13}\right\}$

a) $A = \{x \in \mathbb{Q}; x \geq -2\}$ - nejde, x je pouze z racionálních čísel $\Rightarrow$ na ose pouze body, ne polopřímka
b) $B = \{x \in \mathbb{R}; x \leq 1{,}01\} = (-\infty;1{,}01\rangle$
c) $C = \left\{x \in \mathbb{R}; x > -\frac{2}{13}\right\} = \left(-\frac{2}{13};\infty\right)$

Pedagogická poznámka: Povídáme si s těmi, kteří opět zapíší pomocí intervalu i množinu v bodě a). Kdo se neumí poučit s vlastních chyb…

Neomezené intervaly
Dva speciální znaky: $-\infty$: minus nekonečno, $(+)\infty$: plus nekonečno, u těchto znaků se vždy píše kulatá závorka

Charakteristická vlastnost	Zápis intervalu	Zakreslení na ose	Název
$x \geq a$	$\langle a,+\infty)$		Zprava neomezené intervaly

$x > a$	$(a,+\infty)$		
$x \leq a$	$(-\infty,a\rangle$		Zleva neomezené Intervaly
$x < a$	$(-\infty,a)$		

Speciální neomezený interval $(-\infty,\infty) = R$

Intervaly jsou množiny $\Rightarrow$ je možné určovat jejich průniky a sjednocení (má to význam při řešení rovnic a nerovnic)

Př. 6: Urči sjednocení a průnik následujících dvojic intervalů:

a) $\langle -2;1\rangle$, $\langle -1;\infty)$

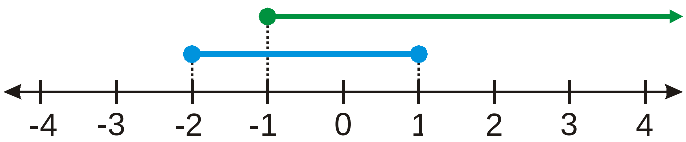
b) $\langle -2;2\rangle$, $\langle 2;4\rangle$

c) $(-2;2)$, $\langle 2;4\rangle$

d) $(-2;1)$, $\langle 2;4\rangle$

Ve všech případech si můžeme pomoci obrázkem číselné osy s nakreslenými intervaly

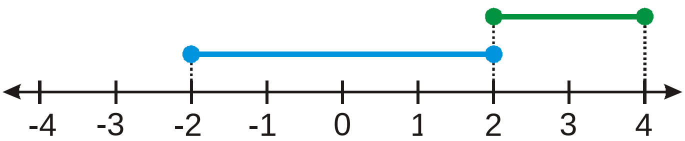
a) $\langle -2;1\rangle$, $\langle -1;\infty)$



$\langle -2;1\rangle \cup \langle -1;\infty) = \langle -2;\infty)$

$\langle -2;1\rangle \cap \langle -1;\infty) = \langle -1;1\rangle$

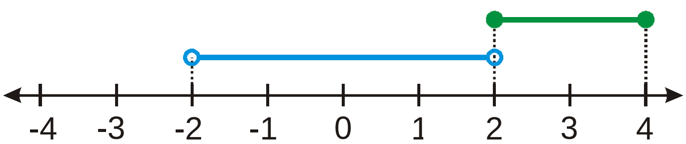
b) $\langle -2;2\rangle$, $\langle 2;4\rangle$



$\langle -2;2\rangle \cup \langle 2;4\rangle = \langle -2;4\rangle$

$\langle -2;2\rangle \cap \langle 2;4\rangle = \{2\}$

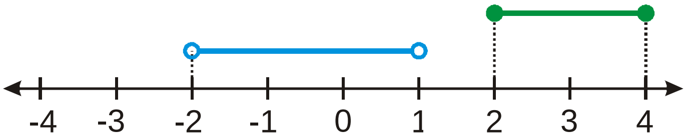
c) $(-2;2)$, $\langle 2;4\rangle$



$(-2;2) \cup \langle 2;4\rangle = (-2;4\rangle$

$(-2;2) \cap \langle 2;4\rangle = \varnothing$

d) $(-2;1)$, $\langle 2;4\rangle$



$(-2;1)\cup\langle 2;4\rangle$ - nejde zapsat jako interval

$(-2;1)\cap\langle 2;4\rangle=\emptyset$

Pedagogická poznámka: S příkladem nebývají problémy. Jenom se bavíme o zápisu průniku v bodě b) (někteří píšou $\langle 2\rangle$) a hlavně o sjednocení v bodě d) (chybný výsledek $(-2;4\rangle$). Snažím se studentům vysvětlit, že v podstatě bezdůvodně porušili základní pravidlo pro intervaly – obsahují „všechno mezi nimi". Pro jejich budoucí matematiku je to varující zlozvyk, protože ve chvílích nejistoty je potřeba se obracet k pravidlům a ne bezdůvodně opisovat předchozí výsledky.

Př. 7: Petáková:
strana 11/cvičení 19
strana 11/cvičení 20

Shrnutí: Interval je způsob, jak jednoduše zapsat podmnožinu reálných čísel, která je „ohraničena" dvěma čísly (nebo nekonečnem) a obsahuje „všechno mezi nimi".