

1.2.6 Reálná čísla

Předpoklady: 1201, 1204, 1205

- značíme \mathbb{R}

Reálná čísla jsou čísla, kterými se vyjadřují délky úseček, čísla jim opačná a $0 \Rightarrow$

- Každé reálné číslo je na číselné ose znázorněno právě jedním bodem.
- Každý bod číselné osy je obrazem právě jednoho reálného čísla.

jsou čísla racionální (\mathbb{Q}) a čísla iracionální (např. $\sqrt{2}, \pi$ - nedají se zapsat zlomkem), která zaplnila mezery v číselné ose

iracionální čísla nelze zapsat ve tvaru $\frac{p}{q} \Rightarrow$ lze zapsat pouze nekonečným neperiodickým rozvojem

Dodatek: Obor čísel iracionálních se nezavádí třeba také proto, že není uzavřený ani pro sčítání.

Př. 1: Rozhodni, které z vlastností určených u číselných operací (U, K, A, N, $^{-1}$) mají operace sčítání, odčítání, násobení a dělení v oboru reálných čísel. K jakým změnám oproti racionálním číslům došlo?

sčítání: U, K, A, N(0), $^{-1}$

odčítání: U, N(0), $^{-1}$

násobení: U, K, A, N(0), $^{-1}$ - kromě nuly

dělení: U, N(0), $^{-1}$ - kromě nuly

Žádné změny oproti racionálním číslům.

Reálná čísla mají všechny hezké vlastnosti racionálních čísel a v tuto chvíli splňují všechny naše požadavky.

Zaokrouhlování:

Př. 2: Zformuluj pravidlo pro zaokrouhlování na daný počet desetinných míst, tak aby podle něj mohl zaokrouhlovat i počítač.

Číslo zaokrouhlíme na místo daného řádu tak, že vynecháme všechny číslice napravo od něj a je-li první vynechaná číslice:

a) menší než 5, tak se všechny ponechané číslice nemění

b) větší nebo rovna 5, pak k číslu z ponechaných číslic připočteme jednotku jeho nejmenšího ponechaného řádu.

Pedagogická poznámka: Zejména přiřítání jednotky nejmenšího ponechaného řádu bývá často nesprávně nahrazováno zvětšením poslední číslice o jedničku. Je dobré nechat studenty najít protipříklad.

Příklad svádí k diskusi o tom, co vlastně dovedou počítače a co lidé a že není úplně jednoduché přetlumočit postupy jasné každému z lidí i počítači.

Pedagogická poznámka: Studenti mají samozřejmě pocit, že zabývat se zaokrouhlováním je zcela zbytečné, příklady jim však působí docela značné problémy.

Př. 3: Zakrouhli hodnotu čísla $\pi = 3,1415926535897932384626433832795028841971693$ na:
a) setiny
b) tisíciny
c) desetitisíciny
d) bilióntiny (12 řádů za desetinou čárkou)

- a) $\pi = 3,14$ - první vynechané číslo 1 \Rightarrow ponechané číslice se nemění
- b) $\pi = 3,142$ - první vynechané číslo 5 \Rightarrow k číslu $\pi = 3,141$ připočtu 0,001
- c) $\pi = 3,1416$ - první vynechané číslo 9 \Rightarrow k číslu $\pi = 3,1415$ připočtu 0,0001
- d) $\pi = 3,141592653590$ - první vynechané číslo 7 \Rightarrow k číslu $\pi = 3,141592653589$ připočtu 0,000000000001

Nula na konci v čísle $\pi = 3,141592653590$ je důležitá, říká nám s jakou přesností číslo známe.

Někdy provádíme **zaokrouhlování na platné číslice** – mezi **platné číslice** se počítají všechny číslice zaokrouhleného čísla, kromě nul, které stojí před první nenulovou číslicí a nul na konci čísla, které vznikly zaokrouhlením.

Například:

23114 (na 2 platná místa) \doteq 23000

23,41 (na 2 plat. místa) \doteq 23

7683,799 (na 6 plat. míst) \doteq 7683,80 \Rightarrow 0 musí být na konci abych věděl, že je to na 6 platných míst

Př. 4: Zaokrouhli na tři platné číslice čísla:
6764; 321,5; 0,004588; 100456; 0,04997

6764 \doteq 6760 zaokrouhluji číslo 4, tedy dolů

321,5 \doteq 322 zaokrouhluji podle 5 tedy nahoru

0,004588 \doteq 0,00459 první platná číslice je 4, zaokrouhluji tedy podle 8

100456 \doteq 100000 nuly za jedničkou jsou platné číslice \Rightarrow zaokrouhluji podle 4 dolů

0,04997 \doteq 0,0500 první platná číslice je 4, zaokrouhluji podle 7, vzniklé nuly jsou platné, vypovídají o přesnosti

Př. 5: Urči všechna celá čísla, která po zaokrouhlení na 1 platnou číslici dají číslo 20000.

Zaokrouhlujeme na jednu platnou číslici \Rightarrow zaokrouhlujeme podle druhé číslice (řád tisíců)

Nejmenší číslo: musíme tisíce zaokrouhlit nahoru, nejmenší taková číslice je 5 \Rightarrow 15000 (za 5 může být cokoliv, nejmenší jsou samé nuly)

Největší číslo: musíme tisíce zaokrouhlit dolů, největší taková číslice je 4 \Rightarrow 24999 (za 4 může být cokoliv, největší jsou samé devítky)

\Rightarrow Čísla v rozmezí 15000 – 24999.

Př. 6: Urči všechna celá čísla, která po zaokrouhlení na 2 platné číslice dají číslo 20000.

Zaokrouhlujeme na dvě platné číslice \Rightarrow zaokrouhlujeme podle třetí číslice (řád stovek)

Nejmenší číslo: musíme stovky zaokrouhlit nahoru, nejmenší taková číslice je 5, před ní musí být 19, aby po přičtení jedničky vyšlo 20 \Rightarrow 19500 (za 5 může být cokoliv, nejmenší jsou samé nuly)

Největší číslo: musíme stovky zaokrouhlit dolů, největší taková číslice je 4 \Rightarrow 20499 (za 4 může být cokoliv, největší jsou samé devítky)

Čísla v rozmezí 19500 – 20499 (na 2 plat. místa) \doteq 20000

Pedagogická poznámka: Předchozí příklady jsou důležité zejména pro pochopení významu, které mají nuly psané za desetinnou čárkou pro určení přesnosti výsledku, zejména ve fyzice.

Pravidla pro porovnávání reálných čísel:

Př. 7: Dopln v pravidlech pro porovnávání reálných čísel nerovnosti napravo:

Pro každá tři reálná čísla a, b, c platí:

Jestliže: $a > b$ a zároveň $b > c$, pak $a > c$

Jestliže: $a > b$ a zároveň $c > 0$, pak $ac > bc$

Jestliže: $a > b$ a zároveň $c < 0$, pak $ac < bc$

Jestliže: $a > b$ a c je libovolné reálné číslo, pak $a + c > b + c$

Pro každá tři reálná čísla a, b, c platí:

Jestliže: $a > b$ a zároveň $b > c$, pak $a > c$

Jestliže: $a > b$ a zároveň $c > 0$, pak $ac > bc$

Jestliže: $a > b$ a zároveň $c < 0$, pak $ac < bc$

Jestliže: $a > b$ a c je libovolné reálné číslo, pak $a + c > b + c$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je ukázkou pravidel, která je sice asi nutné napsat, ale studenti je vcelku ignorují, protože jsou naprosto samozřejmá. V učebnici je často používáno předchozí řešení, jejich dopracování je zadáno jako příklad, tak se studenti musí alespoň minimálně zamyslet.

Př. 8: Porovnej $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ a $1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$:

Vím $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} > 1$ a $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} > \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ podle posledního pravidla $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} > 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Př. 9: Jsou dána záporná reálná čísla a, b, c a kladné reálné číslo d . Platí $a < b$. Rozhodni jaké znaménko mají čísla: $a + c$; ab ; cd ; $b - a$; $b - d$; $d - a$; $d(a + b)$; $c(a - b)$;

$$\frac{a + c}{b}; a^2 + b^2; a^2 - b^2$$

$a + c < 0$ - součet záporných čísel

$ab > 0$ - součin záporných čísel

$cd < 0$ - součin kladného a záporného čísla

- $b - a > 0$ - $a < b \Rightarrow a$ je na ose vlevo od $b \Rightarrow -a > 0$ a je dál od nuly než b
 $b - d < 0$ - $b - d = b + (-d) < 0$ - součet dvou záporných čísel
 $d - a > 0$ - $d - a = d + (-a)$ - součet kladných čísel
 $d(a + b) < 0$ - součin kladného a záporného čísla
 $c(a - b) > 0$ - součin záporných čísel, $a - b = -(b - a)$ viz. výše
 $\frac{a + c}{b} > 0$ - podíl dvou záporných čísel
 $a^2 + b^2 > 0$ - součet dvou kladných čísel
 $a^2 - b^2 > 0$ - a je dál od nuly, jeho druhá mocnina je větší

Pedagogická poznámka: Cílem předchozího příklad je rozvíjet představivost o velikosti a znaménku čísel. Největší problémy jsou s výrazy $b - a$ a $a^2 - b^2$. Studenti si neuvědomují, že i když je číslo $a < b$, jeho absolutní hodnota je větší než absolutní hodnota čísla b , protože obě čísla jsou nalevo od nuly. Studenti podvědomě soudí podle situace v kladné části číselné osy.

Př. 10: Jsou dána záporná reálná čísla a, b, c a kladné reálné číslo d . Platí $a < b$. Porovnej čísla:

- a) ac bc
 b) ad bd

- $ac > bc$ - platí $a < b$, násobím záporným číslem
 $ad < bd$ - platí $a < b$, násobím kladným číslem

Shrnutí: Při zaokrouhlování je nutné dát pozor na nuly. I nuly mohou být platnými číslicemi.