6.1.6 Dynamika ve speciální teorii relativity

Předpoklady: 6105

Speciální teorie relativity zakazuje nadsvětelné rychlosti $\Rightarrow$
Problém: Pokud bych přidal na raketu motor, který bude pracovat dost dlouho, měla by podle dosavadních zkušeností jednou překonat rychlost světla (nemusel bych dokonce ani přidělávat motor, stačilo by na jeden konec rakety přidělat zrcadlo a strkat do ní světelným paprskem ze Země. I ve chvíli, kdy už raketa poletí skoro rychlostí světla, se světlo bude vůči ní pohybovat rychlostí světla a bude do ní strkat stejně silně jako na počátku).

Př. 1: Raketa se pohybuje s konstantním zrychlením $10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ (nic nedosažitelného). Urči, za jakou dobu dosáhne podle zákonů klasické fyziky rychlosti světla.

Konstantní zrychlení $\Rightarrow$ rovnoměrně zrychlený pohyb: $v=v_0+at$ pokud raketa začíná z klidu $v=at$

$$t=\frac{v}{a}=\frac{300000000}{10}\,\mathrm{s}=30\,000\,000\,\mathrm{s}$$

Kolik je to let? $\frac{30\,000\,000}{3600\cdot 24\cdot 365{,}25}=0{,}95\,\mathrm{roku}$ To není nic nedosažitelného, po necelém roce by raketa překonala rychlost světla (což nejde) $\Rightarrow$ relativita popisuje zrychlování určitě jinak.

Pozorovatel na Zemi musí vidět, že zrychlování rakety se postupně zmenšuje i když motory pořád pracují a tlačí stejnou silou $\Rightarrow$ pozorovateli na Zemi se zdá, že raketa je stále těžší a těžší.
$\Rightarrow$ hmotnost už není neměnná absolutní veličina, nezávislá na pozorovateli, ale mění se s rychlostí pozorovatele podle vzorce: $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

m - hmotnost pro pozorovatele, který se vůči předmětu pohybuje
m_0 - hmotnost pro pozorovatele, který vůči předmětu stojí, vždy nejmenší

$\Rightarrow$ když se rychlost blíží c, hmotnost roste k nekonečnu $\Rightarrow$ zrychlení $a=\frac{F}{m}$, které vidí pozorovatel na Zemi se zmenšuje k nule $\Rightarrow$ raketa nepřekročí rychlost světla

Př. 2: Urči jakou rychlost musí mít elektron, aby měl stejnou hmotnost jako proton v klidu.

$m_p=m=1{,}67\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
$m_e=m_0=9{,}1\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{m_0}{m}$$

$$1-\frac{v^2}{c^2}=\frac{m_0^2}{m^2}$$
$$\frac{v^2}{c^2}=1-\frac{m_0^2}{m^2}$$
$$v=c\cdot\sqrt{1-\frac{m_0^2}{m^2}}$$
Dosadíme:
$$v=c\cdot\sqrt{1-\frac{m_0^2}{m^2}}=c\cdot\sqrt{1-\frac{(9{,}1\cdot 10^{-31})^2}{(1{,}67\cdot 10^{-27})^2}}=0{,}99999985\,c$$
Je to sice obrovská rychlost, ale hmotnost elektronu se zvětší víc než tisíckrát.

Př. 3: V roce 2008 byl uveden do zkušebního provozu (a ihned poté se na rok rozbil) největší urychlovač LHC ve Švýcarském Cernu. Urči jakou největší rychlost může v tomto urychlovači dosáhnout proton. Obvod urychlovače měří 27 km a supravodivé magnety, které udržují urychlované částice na kruhové dráze jsou schopny vytvářet magnetické pole o indukci 8 T.

Vyjdeme z odvození z loňského ročníku:
$F_m=F_d$ (magnetická síla hraje roli síly dostředivé), dosadíme: $F_m=e\cdot v\cdot B$,
$$F_d=m\cdot\frac{v^2}{r}$$
$$e\cdot v\cdot B=m\cdot\frac{v^2}{r}$$
rychlost částice: $e\cdot B\cdot r=m\cdot v$ hmotnost protonu se mění dosadíme: $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$
$$e\cdot B\cdot r=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot v$$
$e\cdot B\cdot r\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=m_0\cdot v$ rovnici umocníme
$$(e\cdot B\cdot r)^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=m_0^2\cdot v^2$$
$$(e\cdot B\cdot r)^2(c^2-v^2)=m_0^2\cdot v^2\cdot c^2$$
$$(e\cdot B\cdot r\cdot c)^2=(m_0\cdot v\cdot c)^2+(e\cdot B\cdot r\cdot v)^2$$
$$(e\cdot B\cdot r\cdot c)^2=v^2\cdot[(m_0\cdot c)^2+(e\cdot B\cdot r)^2]$$
$$v^2=\frac{(e\cdot B\cdot r\cdot c)^2}{(m_0\cdot c)^2+(e\cdot B\cdot r)^2}$$
$$v=\frac{e\cdot B\cdot r\cdot c}{\sqrt{(m_0\cdot c)^2+(e\cdot B\cdot r)^2}}=299792456{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$
Vyšlo jen o 2 m/s méně než je přesná hodnota c v kalkulačce.

stále platí zákon zachování hybnosti $p=m\cdot v=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot v$

Je zajímavé, že zavedení vzorce pro změnu hmotnosti je jedinou změnou, kterou musíme provést s rovnicemi klasické mechaniky, aby začaly být invariantní s Lorentzovou transformací (nedalo se mechanickým pokusem zjistit zda se pohybujeme nebo stojíme).

Postřeh: při zrychlování tělesa se zvětšuje jeho hmotnost i kinetická energie $\Rightarrow$ neexistuje vztah mezi těmito veličinami?
Po delším odvozování bychom získali: $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$ $\Rightarrow$ hmotnost je jenom jeden z druhů energie, neplatí zákon zachování hmotnosti v klasickém pojetí
když se zastavíme, pořád něco vážíme $\Rightarrow$ $E_0 = m_0 \cdot c^2$ klidová energie
$\Rightarrow$ vždy platí základní vztah: $E = m \cdot c^2$
Důsledky:

- žádný předmět s nenulovou klidovou hmotností nemůže dosáhnout rychlosti světla (měl by nekonečnou energii)
- fotony letí rychlostí světla $\Rightarrow$ musí mít nulovou klidovou hmotnost (nesmí se zastavit = pořád letí nebo zaniknou)

Př. 4: Urči, jak se změní hmotnost 1 kg uhlí při jeho spálení, pokud se při tom uvolní energie 30 MJ.

Použijeme vzorec $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{30 \cdot 10^6}{(3 \cdot 10^8)^2} \text{kg} = 3{,}3 \cdot 10^{-10} \text{kg}$$

Tak malý rozdíl se špatně měří, není divu, že si toho chemici nevšimli.

Shrnutí: