1.3.4 Rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici

Př. 1: Na základě analogie s přímočarým zrychlením zapiš definiční vztah pro úhlové zrychlení ε a urči jeho jednotku.

Platí: $a=\frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow$ analogicky $\varepsilon=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$. $\varepsilon=\frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow$ jednotka $=\frac{\frac{\text{rad}}{\text{s}}}{\text{s}}=\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}=\text{rad/s}^2$

Př. 2: Doplň tabulku s přehledem normálních a úhlových veličin.

Př. 3: Při zapínaní a vypínání harddisk své otáčky zvětšuje nebo zmenšuje přibližně rovnoměrně. Z klidu se roztočí za 5 s. Vypočti jeho úhlové zrychlení, je-li jeho konstantní rychlost otáčení 7200 ot/min.

$\Delta t=5\,\text{s}$, $\omega_0=0\,\text{rad/s}$, $\omega=7200\,\text{ot/min}=120\,\text{ot/s}=240\pi\,\text{rad/s}=754\,\text{rad/s}$, $\varepsilon=?$

$\Delta\omega=\omega-\omega_0=754-0\,\text{rad/s}=754\,\text{rad/s}$. $\varepsilon=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{754}{5}=151\,\text{rad/s}^2$

Př. 4: Rovnoměrně zrychlený pohyb je popsán trojicí rovnic pro jednotlivé veličiny *a*, *v*, *s*: $a=\text{konstanta}$, $v=v_0+at$, $s=s_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$. Najdi analogickou trojici rovnic pro úhlové veličiny ε, ω, φ.

Př. 5: Harddisk z třetího příkladu se po vypnutí zastaví za 8 s. Jaké je jeho úhlové zrychlení? Kolik otáček ještě vykoná?

$\Delta t=8\,\text{s}$, $\omega=0\,\text{rad/s}$, $\omega_0=7200\,\text{ot/min}=120\,\text{ot/s}=240\pi\,\text{rad/s}=754\,\text{rad/s}$, $\varepsilon=?$, $n=?$

$\omega=\omega_0+\varepsilon t \Rightarrow \varepsilon=\frac{\omega-\omega_0}{t}=\frac{0-754}{8}\,\text{rad/s}^2=-94{,}25\,\text{rad/s}^2$

$\varphi=\varphi_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\varepsilon t^2=0+754\cdot 8+\frac{1}{2}(-94{,}25)8^2\,\text{rad}=3016\,\text{rad}$

$n=\frac{\varphi}{2\pi}=\frac{3016}{2\pi}=480$

Př. 6: Setrvačníkové kolo, které se otáčí 500 krát za minutu, bylo po dobu 15 sekund urychlováno s úhlovým zrychlením $\varepsilon=5\,\text{rad/s}^2$. Jaký počet otáček za minutu dosáhne?

a) výpočet počáteční úhlové rychlosti $\omega_o=2\pi f_0=2\cdot 3{,}14\cdot\frac{50}{6}=52{,}4\,\text{rad/s}$

b) výpočet konečné úhlové rychlosti
$$\omega=\omega_o+\varepsilon t$$
$$\omega=52{,}4+5\cdot 15=52{,}4+75=127{,}4\,\text{rad/s}$$

c) výpočet konečné frekvence $\omega=2\pi f \Rightarrow f=\frac{\omega}{2\pi}\,\text{Hz}$

$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{127{,}4}{2\pi}\,\text{Hz}=20{,}27\,\text{Hz}=1217\,\text{ot/min}$

Př. 7: Rotor elektromotoru (poloměr 12 cm) se po vypnutí zastavil za 15 s, přičemž vykonal ještě 54 celých otáček. Urči:
a) počáteční úhlovou a obvodovou rychlost
b) úhlové zrychlení
c) tečné zrychlení na obvodu
d) počáteční frekvenci

$t = 15\,\mathrm{s}$, $n = 54$, $r = 12\,\mathrm{cm} = 0{,}12\ \mathrm{m}$, $f_0 = ?$, $\varepsilon = ?$, $a_t = ?$, $v_0 = ?$, $\omega_0 = ?$

a) určení počáteční úhlové a obvodové rychlosti

Rovnice pro rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici: $\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$, $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$.

Úhel otočení můžeme snadno určit z počtu vykonaných otáček $\Rightarrow$ v obou rovnicích neznáme dvě veličiny $\Rightarrow$ musíme z jedné rovnice dosadit do druhé.

$$\omega = 0 = \omega_0 + \varepsilon t \ \Rightarrow\ \varepsilon = -\frac{\omega_0}{t}$$

Dosadíme do první rovnice: $\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2}\left(-\frac{\omega_0}{t}\right)t^2 = \omega_0 t - \frac{1}{2}\omega_0 t = \frac{1}{2}\omega_0 t$.

Dosadíme vztah mezi úhlem a počtem otáček $n = \frac{\varphi}{2\pi} \Rightarrow \varphi = 2\pi n$.

$$\varphi = \frac{1}{2}\omega_0 t = 2\pi n \qquad \omega_0 = \frac{4\pi n}{t} = \frac{4\cdot\pi\cdot 54}{15}\,\mathrm{rad/s} = 45{,}2\,\mathrm{rad/s}$$

$$v_0 = \omega_0 r = 45{,}2\cdot 0{,}12\,\mathrm{m/s} = 5{,}43\,\mathrm{m/s}$$

b) určení úhlového zrychlení

$$\varepsilon = -\frac{\omega_0}{t} = -\frac{\frac{4\pi n}{t}}{t} = -\frac{4\pi n}{t^2} = -\frac{4\cdot\pi\cdot 54}{15^2}\,\mathrm{rad/s^2} = 3{,}02\,\mathrm{rad/s^2}$$

c) určení tečného zrychlení

$$a_t = r\cdot\varepsilon = 0{,}12\cdot 3{,}02\,\mathrm{m/s^2} = 0{,}362\,\mathrm{m/s^2}$$

d) určení počáteční frekvence

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \qquad \frac{4\pi n}{t} = 2\pi f_0 \qquad f_0 = \frac{2n}{t} = \frac{2\cdot 54}{15}\,\mathrm{Hz} = 7{,}2\,\mathrm{Hz}$$

Př. 8: Setrvačné kolo se roztáčí z klidu s konstantním úhlovým zrychlením $2\,\mathrm{rad/s^2}$ a otočí se za dobu $\Delta t = t_2 - t_1 = 5$ s o úhel 75 rad. Jak dlouho se již roztáčelo před měřenými pěti sekundami?

Dosadíme: $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{1}{2}\varepsilon t_2^2 - \frac{1}{2}\varepsilon t_1^2 = \frac{1}{2}\varepsilon\left(t_2^2 - t_1^2\right)$

Chceme spočítat t_1. Vyjádříme tedy t_2 pomocí Δt: $t_2 = t_1 + \Delta t$.

Dosadíme: $\Delta\varphi = \frac{1}{2}\varepsilon\left(t_2^2 - t_1^2\right) = \frac{1}{2}\varepsilon\left(\left(t_1 + \Delta t\right)^2 - t_1^2\right) = \frac{1}{2}\varepsilon\left(t_1^2 + 2t_1\Delta t + \Delta t^2 - t_1^2\right)$.

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2}\varepsilon\left(2t_1\Delta t + \Delta t^2\right) = \frac{1}{2}\varepsilon 2t_1\Delta t + \frac{1}{2}\varepsilon\Delta t^2$$

$$\varepsilon t_1\Delta t = \Delta\varphi - \frac{1}{2}\varepsilon\Delta t^2$$

$$t_1 = \frac{\Delta\varphi - \frac{1}{2}\varepsilon\Delta t^2}{\varepsilon\Delta t}$$

$$t_1 = \frac{\Delta\varphi - \frac{1}{2}\varepsilon\Delta t^2}{\varepsilon\Delta t} = \frac{75 - \frac{1}{2}2\cdot 5^2}{2\cdot 5} = 5\,\mathrm{s}$$